ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Α. α. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle.

β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα του Rolle;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f'(\xi)=0$.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

δ. Αν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$, τότε για την f ισχύουν και οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[\alpha, \beta]$.

ε. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

i. Αν η f έχει δύο ρίζες, τότε η f' έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα.

ii. Αν $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f έχει μία, το πολύ ρίζα.

στ. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha)f(\beta)<0$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f έχει μία, ακριβώς ρίζα στο (α, β).

ζ. Αν $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και δεν ισχύουν για αυτήν οι υποθέσεις του θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

η. Αν $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και δεν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.i.	ε.ii.	στ.	ζ.	η.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Α. α. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν μία συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β),

τότε υπάρχει ένα, το πολύ, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο (α, β) ,

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $(\alpha - \beta)f'(\xi) + f(\alpha) = f(\beta)$.

γ. Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη της ευθείας AB , όπου $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

δ. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) > f(\alpha)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) > 0$.

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και ισχύουν $f(0) = 0$, $f(1) < 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) < 0$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Α. Να αποδείξετε την παρακάτω πρόταση:

Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ.

α. Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε υποχρεωτικά $f'(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

γ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

δ. Αν $\Delta=[\alpha,\beta]$ και $f'(x)<0$ σε κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f\downarrow\Delta$.

ε. Αν $\Delta=[\alpha,\beta]$, $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε $f\uparrow\Delta$.

στ. Αν η f' είναι συνεχής στο $\Delta=(\alpha,\beta)$ και $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

ζ. Αν $\Delta=[\alpha,\beta]$, $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $f(\alpha)=0$, τότε $f(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta]$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.

Γ. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

"Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα ισχύει $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$."

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α..