A΄

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν μία συνάρτηση f είναι $1-1$, τότε η f αντιστρέφεται.

β. Αν για μία συνάρτηση f δεν ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Αν μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε για την αντίστροφη συνάρ-τηση f^{-1} ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμε-τρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\widehat{O}y$ και $x'\widehat{O}y'$.

ε. Αν η συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση την f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο Α με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

στ. Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

B΄

α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

β. Όλες οι συναρτήσεις παρουσιάζουν μέγιστο (ολικό) ή ελάχιστο (ολικό).

γ. Υπάρχουν συναρτήσεις που παρουσιάζουν ελάχιστο (ολικό) σε άπειρα σημεία.

δ. Αν μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) μόνο στο $x_0 \in A$, τότε για κάθε $x \in A$ και $x \neq x_0$, $f(x) < f(x_0)$.

ε. Αν μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A δεν παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο $x_0 \in A$, τότε υπάρχει $x_1 \in A$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) < f(x_0)$.

στ. Αν για μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, υπάρχει $x_1 \in A$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) > f(x_0)$, όπου $x_0 \in A$, τότε η f δεν παρουσιάζει στο x_0 μέγιστο (ολικό).

α.	
β.	
γ.	
δ.	
ε.	

Γ

α. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B. Αν, για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x)=g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ.

β. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού τα σύνολα A, B αντιστοίχως, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$.

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού τα σύνολα A, B αντιστοίχως, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο:

$$\{x / x \in A \text{ ή } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$$

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού τα σύνολα A, B αντιστοίχως, τότε η $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1 = \{x \in B / g(x) \in A\}$.

ε. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού τα σύνολα A, B αντιστοίχως, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

στ. Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει

$$f \circ g = g \circ f$$

ζ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

η. Αν, για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.

θ. Αν f, g, h τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η

$$(h \circ g) \circ f$$

α. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήπο $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) \neq f(x_2)$, τότε $x_1 \neq x_2$.

β. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

τότε η f είναι συνάρτηση $1-1$.

γ. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και δεν είναι $1-1$, τότε υπάρχου $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$.

Δ'

δ. Αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης f, η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x, τότε η f είναι $1-1$.

ε. Αν υπάρχει οριζόντια ευθεία που τέμνει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f σε δύο σημεία, τότε η f δεν είναι $1-1$.

στ. Μία συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

ζ. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση $1-1$.

η. Κάθε συνάρτηση που είναι $1-1$, είναι γνησίως μονότονη.

θ. Αν μία συνάρτηση δεν είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν είναι γνησίως μονότονη.

Ε'

α. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

β. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$$

δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

ε. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

στ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

ζ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

η. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\ell\in\mathbb{R}$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

θ. $|\eta\mu x|\le|x|$, $x\in\mathbb{R}$

ι. $|\eta\mu x|=|x| \Leftrightarrow x=0$

ια. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$

ιβ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

ιγ. $\lim\limits_{x\to 0} x\,\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$

ΣΤ

ιδ. Αν $u=g(x)$, $u_0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, $\ell=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$ και $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

ιε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\ell$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\ell$.

ιστ. Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, τότε $\ell>0$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.	η.	θ.	ι.	ια.	ιβ.	ιγ.	ιδ.	ιε.	ιστ.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

β. Ισχύει η ισοδυναμία $x-\etaμx>0\Leftrightarrow x>0$.

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=m$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m-\ell$.

δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\neq 0$, τότε $f(x)\neq 0$ κοντά στο x_0.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\neq 0$, τότε οι τιμές της f κοντά στο x_0 είναι ομόσημες του ℓ.

στ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0.

ζ. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

η. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\ell$, τότε $\ell\geq 0$.

θ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=\ell$, τότε $\ell>0$.

ι. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[κ]{f(x)}=\sqrt[κ]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0 με $κ\in\mathbb{N}$ και $κ\geq 2$.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.	η.	θ.	ι.

Z^{D}

α. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$, κοντά στο x_0 .

β. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left(-f(x)\right) = +\infty$.

γ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, και $f(x) > 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

δ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

ε. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

στ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

ζ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$.

η. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε:

i. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$ ii. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty, \ \alpha \neq 0$

θ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε:

i. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = +\infty$ ii. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

ι. i. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

ii. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, $\nu \in \mathbb{N}$. iii. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}$

ια. Υπάρχει το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in \mathbb{N}$ στο $x_0 = 0$.

H^{D}

στ. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$

ζ. Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to 0} \log_\alpha x = 0$

η. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = +\infty$

θ. Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$

ι. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = -\infty$

Θ΄

α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε και η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

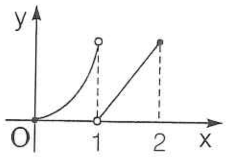
δ. Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) < 0$, τότε κοντά στο x_0 ισχύει $f(x) < 0$.

στ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$.

ζ. Αν η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής στο x_0, τότε και η f είναι συνεχής στο x_0.

η. Η συνάρτηση f που έχει γραφική παράσταση στο διπλανό σχήμα είναι συνεχής.



Ι΄

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 ,$$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

β. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

γ. Αν η f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

δ. Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$.

ε. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha)\, f(\beta) > 0$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

στ. Αν η f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(x) \neq 0$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

IA'

α. Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε,

$$ή\ f(x) > 0,\ \text{για κάθε}\ x \in \Delta,\ ή\ f(x) < 0,\ \text{για κάθε}\ x \in \Delta$$

β. Αν f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και ρ_1, ρ_2 διαδοχικές ρίζες της f στο Δ με $\rho_1 < \rho_2$, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο (ρ_1, ρ_2).

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή, ή είναι θετική, για κάθε $x \in \Delta$, ή είναι αρνητική, για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

δ. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα, στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ε. Αν μία συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σ' ένα διάστημα Δ, τότε η f είναι υποχρεωτικά συνεχής στο Δ.

στ. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε, αν υπάρχει $\alpha \in \Delta$ με $f(\alpha) < 0$, έχουμε

$$f(x) < 0,\ \text{για κάθε}\ x \in \Delta$$

ζ. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε, για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ έχουμε

$$f(\alpha)f(\beta) > 0$$

IB'

α. Αν μία συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σ' ένα διάστημα Δ, τότε η f είναι υποχρεωτικά συνεχής στο Δ.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή, ή είναι θετική, για κάθε $x \in \Delta$, ή είναι αρνητική, για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

γ. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

δ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

ε. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

1Γ

στ. Αν η f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ, τότε το $f(\Delta)$ είναι διάστημα, ή μονοσύνολο.

ζ. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.

η. Αν το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της, τότε κατ' ανάγκη η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

θ. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

ι. Αν η f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta]$ και $f \uparrow \Delta$, τότε
$$f(\Delta) = (\lim_{x\to\alpha^+} f(x),\ f(\beta)]$$

ια. Αν η f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$, $f \downarrow \Delta$ και $f(\Delta) = (\gamma, \delta)$, τότε $\gamma = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ και $\delta = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$.

ιβ. Έστω μία συνεχής συνάρτηση f σ' ένα διάστημα Δ. Αν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή συμπίπτουν, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

Γ. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω όρια δεν είναι καλώς ορισμένα.

α. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2 - x + 1}$

β. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^2 + x - 1)$

γ. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^7 + x + 1}$

δ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}$

Δ. Έστω $f:[0, 3]\to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής με $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ και $f(3) = 5$. Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

α. Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

β. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$

γ. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

δ. $[-1, 5] \subseteq f([0, 3])$

ε. Η ελάχιστη τιμή της f είναι το -1.

1Δ'

Ε. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f(0)f(1)<0$. Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει από τις υποθέσεις;

α. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(0)x^3+x+1}{f(1)x+2}=-\infty$

β. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

γ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)}{f(x)-f(0)}=+\infty$

δ. Η μέγιστη τιμή της f είναι το $f(0)$ και η ελάχιστη το $f(1)$.

ε. Για οποιαδήποτε $x_0\in(0,1)$ υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$.

1Ε'

α. Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

$$f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

δ. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ε. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

στ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

ζ. Αν $f'(x_0)>0$, τότε $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$, κοντά στο x_0.

ΙΣΤ^ρ

α. Η κλίση της συνάρτησης f στο x_0 είναι η $f'(x_0)$.

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0 είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

γ. Αν ε η εφαπτομένη της C_f στο x_0, τότε $\varepsilon // x'x \Leftrightarrow f'(x_0)=0$.

δ. Αν η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη, τότε δεν υπάρχουν εφαπτομένες παράλληλες στον άξονα $x'x$.

ε. Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο x_0, δεν μπορεί να έχει με τη C_f και άλλο κοινό σημείο.

ΙΖ^ρ

β. i. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g'(x_0)$$

ii. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)\cdot g'(x_0)-f'(x_0)g(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$$

γ. i. $(\varepsilon\varphi x)' = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x\in\mathbb{R}-\{x\,/\,\sigma\upsilon\nu x=0\}$.

ii. $(\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\mathbb{R}-\{x\,/\,\eta\mu x=0\}$.

δ. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'\big(g(x_0)\big)\cdot g'(x_0)$.

ε. i. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\{\mathbb{Z}\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$.

ii. Αν $\alpha>0$, τότε $(\alpha^x)'=x\cdot\alpha^{x-1}$.

iii. $(3^x)'=x\cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iv. Για κάθε $x\neq 0$ είναι $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

ζ. Αν η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0.