4^{o} ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
Ημερομηνία: 22 – 12 – 2023
Διδάσκων: Βλάχος Σπυρίδων

Τάξη: Γ
Τμήμα Γ22

A1	A2	A3	A4	A
B1	B2	B3	B4	B
Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Γ
Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ
Σ Υ Ν Ο Λ Ο				

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Εξεταζόμενη ύλη : Μέχρι ρυθμό μεταβολής χρόνος : 3 ώρες

Επώνυμο:	**Όνομα:**

ΘΕΜΑ Α

Α1 Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο χ_o τότε θα είναι και συνεχής στο χ_o.
(Μονάδες 7)

Α2 Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano. **(Μονάδες 4)**

Α3. Έστω συνάρτηση $f:A\to\Re$ και $x_o\in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι ασυνεχής στο χ_o. **(Μονάδες 4)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)+g(x)\right)=l_1+l_2$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=l_2$

β. Για την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$

δ. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $2^{ου}$ βαθμού έχει πάντα μια ακριβώς οριζόντια εφαπτομένη.

ε. Έστω η συνάρτηση $f:A\to\Re$ που είναι 1-1. Τότε $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ για κάθε $x\in A$.
(Μονάδες 2Χ5=10)

ΘΕΜΑ Β Δίνονται οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε: $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$ και $g(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι f=g (μονάδες 3) και ότι η f είναι περιττή (μονάδες 3). **(Μονάδες 6)**

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη (μονάδες 3) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (Μονάδες 4). **(Μονάδες 7)**

Β3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}. **(Μονάδες 3)**

Β4. Αν $h(x)=e^x$, να ορίσετε τη συνάρτηση $H(x)=(hog)(x)$ (μονάδες 3) και να λύσετε την εξίσωση $H(x)=-\dfrac{2}{3}x$ (Μονάδες 6) **(Μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ Γ Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο IR, τέτοια ώστε $f^2(x)=4xf(x)+2x+1$ για κάθε $x\in\Re$ και f(2)>4.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x)-2x, $x\in\Re$, διατηρεί πρόσημο, (μονάδες 3) και ότι $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+2x+1}$, $x\in\Re$ (μονάδες 4) **(Μονάδες 7)**

Γ2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. **(Μονάδες 1+3)**

Γ3. Να εξετάσετε πόσες εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f υπάρχουν, οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία ψ=3χ και να γράψετε τις εξισώσεις τους. **(Μονάδες 5)**

Γ4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f^2(x)+3x^2+x.f(x)+x^2.3^x.\eta\mu\left(\frac{1}{5}\right)^x}{f^2(x)+x^2+x.\eta\mu x}$ **(Μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ Δ. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta.x & x<1 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι α=β=1 **(Μονάδες 5)**

Δ2 Να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(Μονάδες 6)**

Δ3. Ένα σημείο Μ(χ,ψ) κινείται κατά μήκος της καμπύλης ψ=f(x), χ≥1. Τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Α(3,10), ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\overset{\Delta}{MOK}$ τη χρονική στιγμή t_o, όπου Κ(x,0) και Ο(0,0) **(Μονάδες 6)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα χ_o, η οποία είναι αρνητική (μονάδες 3) και στη συνέχεια, ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_o\cdot f(x)+\dfrac{e^{2(x_o-1)}}{4}=0$ έχει μοναδική λύση στο $\Re$ (Μονάδες 5)

(Μονάδες 8)

Καλά κι ευλογημένα Χριστούγεννα!

Καλή επιστροφή στο σχολείο … με το νέο έτος!

Λύσεις διαγωνίσματος Χριστουγέννων

Θέμα Α   Σ − Λ − Σ − Σ − Λ

Θέμα Β   Β1. Για την f πρέπει $\frac{x+1}{x-1}>0 \Leftrightarrow -(x+1)\cdot(x-1)>0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)<0 \Leftrightarrow -1<x<1 \Rightarrow D_f=(-1,1)$

Για την g πρέπει $x+1>0$ και $1-x>0 \Rightarrow D_g=(-1,1)$

Επιπλέον $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=\ln(x+1)-\ln(1-x)=g(x)$

$\forall x \in D_f=D_g$. Άρα $f=g$.

$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)=-\ln\left(\frac{1+x}{-x+1}\right)=-f(x) \Rightarrow f$ περιττή

Β2. Με παράγωγο ή κατασκευαστικά για την g.

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+1<x_2+1 \Leftrightarrow \ln(x_1+1)<\ln(x_2+1)$

$\Rightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow \ln(1-x_1)>\ln(1-x_2) \Rightarrow -\ln(1-x_1)<-\ln(1-x_2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη $\Rightarrow g(x_1)<g(x_2) \Rightarrow g \nearrow \Leftrightarrow f \nearrow$

Για το σύνολο τιμών: $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=-\infty$

Διότι $\lim\limits_{x\to 1^-}[\ln(1-x)]=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$ Άρα $g(A)=\mathbb{R}=f(A)$

Β3. Αφού $f \nearrow \Rightarrow$ αντιστρέφεται· έχω $f(x)=y \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=y \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x}=e^y \Leftrightarrow 1+x=e^y\cdot(1-x) \Leftrightarrow$

$1+x=e^y-x\cdot e^y \Leftrightarrow x+x\cdot e^y=e^y-1 \Leftrightarrow x\cdot(1+e^y)=e^y-1 \Leftrightarrow$

$x=\frac{e^y-1}{1+e^y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{e^x-1}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β4. $D_{h\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_h\}=D_g=(-1,1)$

$H(x)=e^{\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}=\frac{x+1}{1-x}$. Η εξίσωση έχει π.ο. το $D_H=(-1,1)$

$\frac{x+1}{1-x}=-\frac{2}{3}x \Leftrightarrow 3x+3=-2x+2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=1,\ \frac{3}{2}$

απορρίπτονται.

Σ - Λ - Σ - Σ - Α.

Γ1 $f^2(x) - 4x\cdot f(x) + 4x^2 = 4x^2+2x+1 \Leftrightarrow (f(x)-2x)^2 = 4x^2+2x+1$

$\Delta = 4 - 4\cdot 4\cdot 1 < 0 \Rightarrow A(x) = f(x) - 2x$ διατηρεί πρόσημο

Γ2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim(2+2) = 4$ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}}$

Γ3 $f'(x) = 2 + \frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+4x+1}} = 2 + \frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$

Είναι $f'(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+4x+1}} = 1 \Leftrightarrow 4x+1 = \sqrt{4x^2+4x+1}$, $x \geq -1/4$

$16x^2 + 8x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow 12x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 4x\cdot(3x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x = -1/3$ $1/3 > 1/4 \Rightarrow -1/3 < -1/4$ απορ.

$f(0) = 1 \rightarrow y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow \boxed{y = 3x+1}$

Γ4 $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 3 + \frac{f(x)}{x} + 3^x\cdot ημ\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + 1 + \frac{ημx}{x}}\right] = \frac{16+3+4+0}{16+1+0} = \frac{23}{17}$

$\lim_{x\to+\infty}\left[3^x\cdot ημ\left(\frac{1}{5}\right)^x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[3^x\left(\frac{1}{5}\right)^x\cdot\frac{ημ\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\left(\frac{1}{5}\right)^x}\right] = 0\cdot 1 = 0.$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x = 0.$ $\boxed{Γ4.\ L = \frac{23}{17}}$

Δ1 $1 + α = 1 + b \Rightarrow α = b.$

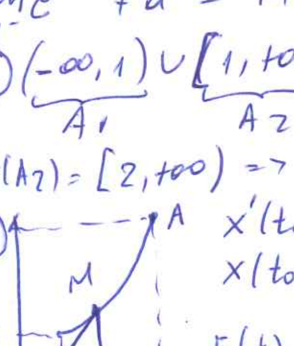
$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 + \cancel{α} - \cancel{α} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$ $\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1} + αx - α - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1} + α\right] =$

$\lim_{x\to 1^-} e^{x-1} + α = 1 + α \Rightarrow α + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{α = 1}$

Δ2 $\underbrace{(-\infty, 1)}_{A_1} \cup \underbrace{[1, +\infty)}_{A_2}$ Γν A_1 ↑ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{x-1} + x) = -\infty$. $f(A_1) = (-\infty, 2)$

$f(A_2) = [2, +\infty) \Rightarrow f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \mathbb{R}$.

Δ3



$x'(t_0) = 2$ $(MOK) = \frac{(OK)\cdot(MK)}{2} =$

$x(t_0) = 3$ $= \frac{x\cdot(x^2+1)}{2}$

$E(t) = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}$

$E'(t_0) = \frac{3x^2(t_0)\cdot x'(t_0) + x'(t_0)}{2} =$

$= \frac{3\cdot 3^2\cdot\cancel{2} + \cancel{2}}{\cancel{2}} = 27 + 1 = 28$

Δ4 Αφού $f(A_1) = (-\infty, 2)$, $0 \in f(A_1)$ ...

Είναι $e^{x_0-1} + x_0 = 0 \Rightarrow e^{x_0-1} = -x_0$

$\Delta = (-x_0)^2 - \cancel{4}\cdot 1\cdot\frac{e^{2(x_0-1)}}{\cancel{4}} = x_0^2 - e^{2(x_0-1)} =$

$x_0^2 - (-x_0)^2 = 0.$ Άρα

(8) $\Leftrightarrow f(x) = \frac{x_0}{2} \in f(A_1)$