4[ο] ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
Ημερομηνία: 24 – 04 – 2024

Τάξη: Γ
Τμήμα Γ22

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Εξεταζόμενη ύλη : Όλη η ύλη χρόνος : 3 ώρες

Επώνυμο:	**Όνομα:**

Α1	**Α2**	**Α3**	**Α4**	**Α**
Β1	**Β2**	**Β3**	**Β4**	**Β**
Γ1	**Γ2**	**Γ3**	**Γ4**	**Γ**
Δ1	**Δ2**	**Δ3**	**Δ4**	**Δ**
Σ Υ Ν Ο Λ Ο				

ΘΕΜΑ Α

Α1 Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ένα σημείο του χ_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν f′(x)>0 στο $(a,x_o)\cup(x_o,\beta)$, τότε το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). **(Μονάδες 7)**

Α2 Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία. **(Μονάδες 4)**

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ, τότε f′′(x)>0 για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.». Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό σαν σωστό (Σ) ή λάθος (Λ), **(1 μονάδα)** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας **(3 μονάδες)**.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\int_a^\beta f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α,β], τότε παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο [α,β] **(Μονάδες 2)**

β. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο. **(Μονάδες 2)**

γ. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνεχούς συνάρτησης με πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα [α,β], είναι ολικό μέγιστο. **(Μονάδες 2)**

δ. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (α,β) και $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to\beta^-} f(x)$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, με f′(ξ)=0. **(Μονάδες 2)**

ε. Αν $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=l\in\Re$ και $f(x)<h(x)<g(x)$ για κάθε $x\in\Re$ τότε υπάρχει το $\lim_{x\to a} h(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. **(Μονάδες 2)**

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\Re$ με $f(x)=x^2-2x+2,\ x\in[1,+\infty)$.

Β1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}. **(Μονάδες 5)**

Β2. Να βρείτε το σύνολο των τετμημένων της γραφικής παράστασης της f, που είναι «πάνω» από την ευθεία ε: ψ=χ (μονάδες 3) και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. **(Μονάδες 7)**

Β3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(fof)(x)$. Να δείξετε ότι $g(x)=(x-1)^4+1,\ x\geq 1$. **(Μονάδες 6)**

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(\eta\mu\chi+2)}{x}$. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f:\Re \rightarrow \Re$ με $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax+\beta, & x\leq 3 \\ x^2-10x+22, & x>3 \end{cases}$, για την οποία εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο [2,8].

Γ1. Να δείξετε ότι α=2 και β=4 και στη συνέχεια να βρείτε το ξ ή τα ξ του θεωρήματος. **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(Μονάδες 6)**

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι $\chi'(t)=0{,}5$ μον/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κλίσης της ευθείας ΟΜ, όπου Ο(0,0), όταν το σημείο Μ διέρχεται από το Α(4,f(4)). **(Μονάδες 6)**

Γ4. Να βρείτε τα σημεία που ανήκουν στην ευθεία ε: χ=3, από τα οποία άγονται εφαπτομένες προς την C_f με κλίση 2. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty] \rightarrow \Re$ με $f(x)=e^x-\ln x$ και $g(x)=x.f(x)$ για κάθε $x\in(0.+\infty]$ και

Δ1. Να αιτιολογήσετε ότι f(x)>0 για κάθε x>0 (μονάδες 2) και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=1 και χ=2. **(Μονάδες 6)**

Δ2 Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική θέση ελαχίστου χ_o της f για την οποία ισχύει $x_o\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. **(Μονάδες 6)**

Δ3. Να δείξετε ότι $\sqrt{e}<f(x_o)<\sqrt{e}+\ln 2$, όπου χ_o, αυτό του ερωτήματος Δ2. **(Μονάδες 6)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{f(x_o)}^{f(1)}\frac{x}{f(x)}dx<\frac{\sqrt{e}(e-1)}{2}$ **(Μονάδες 7)**

«Ἓν οἶδα ὅτι οὐδὲν οἶδα»

Διαγώνισμα Γ' Θετικής 2024 : όλη η ύλη

Θέμα Α   Σ - Λ - Σ - Σ - Λ

Θέμα Β   Β1. $f'(x)=2x-2>0 \ \forall x>1$, αφού f συνεχής στο $[1,+\infty)$ $\Rightarrow f\uparrow$ στο $[1,+\infty) \Rightarrow$ αντιστρέφεται.

Λύνω την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x: $x^2-2x+2=y \Leftrightarrow$
$(x-1)^2+1=y \Leftrightarrow (x-1)^2=y-1$ (1). Πρέπει $y\geq 1$.

(1) $\Rightarrow x-1=\sqrt{y-1}$ (2) ή $x-1=-\sqrt{y-1}$ (3)

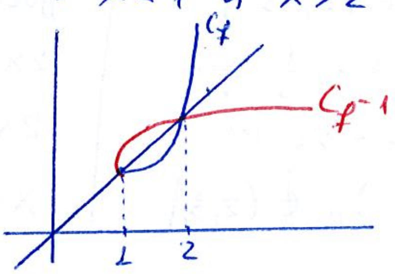
Αφού $x>1 \Rightarrow$ η (3) απορρίπτεται, άρα $x=1+\sqrt{y-1} \ \forall y\geq 1$

έτσι $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-1}$, $x\geq 1$.

Β2. $f(x)>x \Leftrightarrow x^2-3x+2>0$ $\begin{array}{ccccc} & 1 & & 2 & \\ \hline + & \phi & - & \phi & + \end{array}$ $\Rightarrow x<1$ ή $x>2$

όμως $D_f=[1,+\infty) \Rightarrow x>2$

Είναι $f(1)=1$. Η C_f είναι τμήμα παραβολής



Β3. $D_g = D_f \cap \{x: f(x)\in D_f\}$

όμως $f(x)\geq 1$, άρα $f(x)\in D_f \Rightarrow D_g=D_f$

Τώρα $f(x)=(x-1)^2+1. \Rightarrow f(f(x)) = f\left((x-1)^2+1\right) = \left((x-1)^2+1-1\right)^2+1$
$= (x-1)^4+1$.

Β4. $ημx \geq -1 \Rightarrow ημx+2\geq 1 \Rightarrow ημx+2 \in D_g \ \forall x\in\mathbb{R}$. Άρα το όριο είναι καλώς ορισμένο και $g(ημx+2)=(ημx+1)^4+1$

$-1\leq ημx \leq 1 \Rightarrow 0\leq ημx+1\leq 2 \Rightarrow 0\leq (ημx+1)^4 \leq 2^4 \Rightarrow g(x)\in[0, 2^4+1]$

Άρα για $x>0$: $0\leq \dfrac{g(ημx+2)}{x} \leq \dfrac{2^4+1}{x}$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^4+1}{x}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} 0=0$, από κριτήριο παρεμβολής $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(ημx+2)}{x}=0$.

Θέμα Γ   Γ1. Πρέπει (καταρχάς) f συνεχής στο $[2,8]$· γι' αυτό αρκεί $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow -9+a\cdot 3+b = 9-30+22 \Leftrightarrow$
$\boxed{3a+b=10 \ (1)}$ Επιπλέον πρέπει και αρκεί f παρ/μη στο $(2,8)$· γι' αυτό αρκεί f παρ/μη στο $3 \Leftrightarrow$ $\boxed{\underbrace{\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}}_{L_1} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}}_{L_2} \ (2)}$

όμως

$L_1=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x^2+ax+b-b}{x-3} \overset{0/0}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-2x+a}{1} = -6+a$

$L_2=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-10x+22-1}{x-3} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-10}{1} = -4$

$\Rightarrow a=2$, (1) $\Rightarrow b=4$.

Τότε $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+4, & x\le 3\\ x^2-10x+22, & x>3\end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases}-2x+2, & x<3\\ \gamma, & x=3\\ 2x-10, & x>3\end{cases}$

όμως το $f'(3)=\gamma$ είναι το $L_1=L_2$ που υπολόγισα $\Rightarrow f'(3)=-4$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}-2x+2, & x\le 3\\ 2x-10, & x>3\end{cases}$. Τώρα υπολογίζω την παράσταση $\dfrac{f(8)-f(2)}{8-2}=$

$=\dfrac{6-4}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$. Για να βρω τα ξ του ΘΜΤ, λύνω την εξίσωση $f'(x)=\dfrac{1}{3}$ και έχω

για $x\in(2,3]$
$-2x+2=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$
$-2x=-5/3 \Leftrightarrow$
$x=5/6 \notin (2,3]$

για $x\in(3,8)$
$2x-10=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$
$2x=\dfrac{31}{3} \Leftrightarrow$
$x=\dfrac{31}{6}\in(3,8)$, δεκτή.

Άρα μοναδικό ξ του ΘΜΤ είναι το $\xi=\dfrac{31}{6}$.

Γ2. Λύνω τις εξισώσεις

$f'(x)=0$, $x\le 3$ και $f'(x)=0$, $x>3$
$-2x+2=0$ $\quad$ $2x-10=0$
$x=1$ δεκτή $\quad$ $x=5$ δεκτή

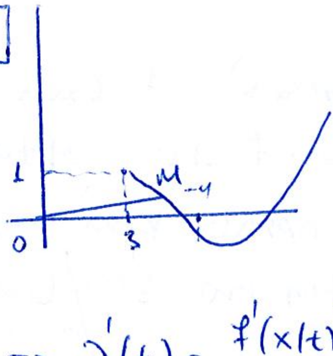
	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	−	0 +	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		Τ.Μ 5		Τ.ε. −3	

Το πρόσημο της f' μπορεί να γίνει με τη μέθοδο επιλεγμένης τιμής + σχόλιο Bolzano, αφού $f'(x)$ συνεχής.

$f''(x)=\begin{cases}-2, & x<3\\ 2, & x>3\end{cases}$ Στο $x_0=3$ δεν με νοιάζει, αφού f συνεχής. Άρα

	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	−	+	
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	
		Σ.Κ	

$\boxed{Γ3}$



Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $M(x,f(x))$. Η κλίση της ευθείας ΟΜ είναι $\lambda=\dfrac{f(x)-0}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$

Άρα $\lambda(t)=\dfrac{f(x(t))}{x(t)} \Rightarrow \lambda'(t)=\dfrac{f'(x(t))\cdot x'(t)\cdot x(t)-f(x(t))\cdot x'(t)}{x^2(t)}$.

Είναι $x(t_0)=4$, $f(x(t_0))=f(4)=-2$, $x'(t_0)=\dfrac{1}{2}$, $f'(x(t_0))=f'(4)=-2$

Άρα $\lambda'(t_0) = \dfrac{-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 4 - (-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{4^2} = \dfrac{-4+1}{16} = -3/16$

$\boxed{Γ4}$ Αφού οι εφαπτόμενες έχουν κλίση 2, για να βρω τις τετμημένες των σημείων επαφής, λύνω την εξίσωση

$f'(x) = 2,\ x > 3$ και $f'(x) = 2,\ x \leq 3$

$2x - 10 = 2 \Leftrightarrow$ $\quad -2x + 2 = 2 \Leftrightarrow$

$2x = 12$ $\quad -2x = 0$

$x = 6$ δεκτή $\quad x = 0$ δεκτή.

Σημεία επαφής $A(6, f(6)) \equiv (6, -2)$, $B(0, f(0)) \equiv (0, 4)$

Η εφαπτομένη στο A είναι ε_1: $y - (-2) = 2\cdot(x - 6) \Leftrightarrow$

$y + 2 = 2x - 12 \Leftrightarrow y = 2x - 14$ που τέμνει την ευθεία

$x = 3$ για $y = 2\cdot 3 - 14 = -8$ στο σημείο $Γ(3, -8)$

Η εφαπτομένη στο B είναι ε_2: $y - 4 = 2\cdot(x - 0) \Leftrightarrow$

$y = 2x + 4$ που τέμνει την ευθεία $x = 3$ για

$y = 2\cdot 3 + 4 = 10$, στο σημείο $Δ(3, 10)$.

Θέμα Δ

$\boxed{Δ1}$ Από γνωστές ανισότητες είναι $e^x \geq x + 1 > x > x - 1 \geq \ln x$

Άρα $e^x > \ln x \Rightarrow f(x) > 0\ \forall x > 0$.

Η $g(x) = x\cdot f(x) > 0\ \forall x > 0$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^2 g(x)dx = \underbrace{\int_1^2 x\cdot e^x dx}_{I_1} - \underbrace{\int_1^2 x\ln x\, dx}_{I_2} = e^2 - 2\ln 2 + \frac{3}{4}.$$

$$I_1 = \left[x\cdot e^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - \left[e^x\right]_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$$

$$I_2 = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx = 2\ln 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$= 2\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

$\boxed{\Delta 2}$ Είναι $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$, $x>0$. $f'(1/2)=\sqrt{e}-2<0$, διότι $\sqrt{e}<2 \Leftrightarrow e<4$
και $f'(1)=e-1>0$. Αφού f' συνεχής στο $[1/2,1]$, από Θ. Bolzano
$\exists\, x_0\in(1/2,1)$ με $f'(x_0)=0$. Επιπλέον $f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$, $x>0$
Άρα $f'(x) \uparrow$ στο $(0,+\infty)$. Για $x<x_0 \Rightarrow f'(x)<f'(x_0)=0$. Άρα
επιπλέον το x_0 είναι μοναδικό.

	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο.Ε.	

$\boxed{\Delta 3}$ Αφού $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο $\Rightarrow$
$f(x_0)<f(1/2)=\sqrt{e}-\ln 1/2=\sqrt{e}+\ln 2$
Ακόμη $x_0>1/2 \Rightarrow e^{x_0}>e^{1/2}=\sqrt{e}$
και $x_0<1 \Rightarrow \ln x_0<0 \Rightarrow -\ln x_0>0$
$\Big\}\; e^{x_0}-\ln x_0>\sqrt{e}$
$f(x_0)>\sqrt{e}$ ο.ε.δ.

$\boxed{\Delta 4}$ Είναι $f(x)\geq f(x_0)>\sqrt{e} \Rightarrow 0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow \frac{x}{f(x)}<\frac{x}{\sqrt{e}}$ (1)

Αφού $f(x_0)$ το ελάχιστο της f $\Rightarrow f(x_0)<f(1) \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$$\int_{f(x_0)}^{f(1)}\frac{x}{f(x)}\,dx<\int_{f(x_0)}^{f(1)}\frac{x}{\sqrt{e}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{e}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{f(x_0)}^{e}=\frac{1}{2\sqrt{e}}\left(e^2-f^2(x_0)\right)$$

Άρα $I=\int_{f(x_0)}^{f(1)}\frac{x}{f(x)}\,dx<\frac{1}{2\sqrt{e}}\left(e^2-f^2(x_0)\right)$ (2)

Είναι $f(x_0)>\sqrt{e} \Rightarrow f^2(x_0)>e \Rightarrow -f^2(x_0)<-e \Rightarrow e^2-f^2(x_0)<e^2-e$

Έτσι από (2) $\Rightarrow I<\frac{1}{2\sqrt{e}}\left(e^2-e\right)=\frac{e(e-1)}{2\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}\,(e-1)}{2}$ ο.ε.δ.