Παράγωγος σε σημείο

1. Δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ με $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ και $f(x_0)=g(x_0)$, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=g'(x_0)$.
2. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , να αποδείξετε ότι υπάρχει το $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{2h}$ και είναι ίσο με $\frac{3}{2}.f'(x_0)$.
3. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ και $\lim_{x \to 0} \frac{f(h+2)}{h} = 3$ να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 .
4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και ισχύει $f(x_0) \neq 0$ να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
5. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο $0 \in \Delta$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(|x|)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν ισχύει $f'(0)=0$.
6. Έστω συνάρτηση f: $\Re \to \Re^*_+$ με $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε x, y $\in \Re$. Να δείξετε ότι:

   α) $f(0)=1$ β) για κάθε $x \in \Re$, $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

   γ) για κάθε $x, y \in \Re$, $f(x+y)=f(x).f(y)$

   δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\chi_0 \in \Re$.
7. Έστω συνάρτηση f: $\Re^*_+ \to \Re$ με $f\left(\frac{x}{y}\right)$=f(x)-f(y) για κάθε $x, y \in \Re^*_+$.

   Να δείξετε ότι: α) $f(1)=0$,

   β) για κάθε $\chi \in \Re^*_+$ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

   γ) για κάθε $x, y \in \Re^*_+$ $f(x.y)=f(x)+f(y)$

   δ) αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_o=1$ με $f'(1)=1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^*_+$ με $f'(\chi)=\frac{1}{x}$.
8. Έστω δυο πολυώνυμα P(x) , Q(X) και έστω ρ μια ρίζα του P(χ) με πολλαπλότητα 1. Αν η συνάρτηση $f(x)=|P(\chi)|.Q(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ρ, ν' αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα και του Q(x).
9. Έστω η συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ παραγωγίσιμη στο $\alpha \in \Re$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \to 0} \frac{f^3(2x+a)-f^3(a-5x)}{x}=21.f'(\alpha).f^2(\alpha)$

10. Αν $f^2(x)+g^2(x)=x^4-2x^2+1$ για κάθε $\chi \in \Re$, να δείξετε ότι $f'^2(1)+g'^2(1)=4$
11. Να βρεθεί η παράγωγος των επόμενων συναρτήσεων, καθώς και το σύνολο όπου αυτή ορίζεται.
12. α) $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ β) $f(x)=\sqrt{x}$ ημχ γ) $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

δ) $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & 0 \le x < 1 \\ \frac{x^2+1}{6} & x \ge 1 \end{cases}$ ε) $f(x)=\begin{cases} x^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\chi}\right) & \chi \ne 0 \\ 0 & \chi = 0 \end{cases}$

13. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\chi_o=0$ και $f'(0)=-1$, $g'(0)=2$, $f(0)=-1$, $g(0)=-2$, ν' αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x).g(x)-2}{x}=0.$$

14. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

α) $S_1 = 1 + 2x + 3x^2 +\ldots+ \nu x^{\nu+1}$, $\nu\in N^*$

β) $S_2 = 2x + 4x^3 + 6x^5 +\ldots+ 2\nu .\, x^{2\nu-1}$, $\nu\in N^*$

γ) $S_3 = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \ldots + \nu e^{\nu x}$, $\nu\in N^*$

δ) $S_4= 2e^{2x} + 4e^{4x} + \ldots + 2\nu e^{\nu x}$, $\nu\in N^*$

15. Αν ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου P(χ) και της παραγώγου του P΄(χ), να δείξετε ότι το ρ είναι διπλή ρίζα του P(χ) και αντιστρόφως. Με τη βοήθεια αυτής της πρότασης να βρείτε τα α, β ώστε το πολυώνυμο $P(\chi)=2\chi^3+\alpha\chi^2+(3\alpha-\beta)\chi-2$ να διαιρείται με το $(\chi-1)^2$
16. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(χ) δια $(\chi-\alpha)^2$ είναι $\chi.P'(\alpha)+[P(\alpha)-\alpha.P'(\alpha)]$.
17. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(χ)για τα οποία για κάθε $\chi \in \Re$ ισχύει $[P'(\chi)]^3=[P(\chi)]^2$.
18. Να βρεθεί η παράγωγος των επόμενων συναρτήσεων και το σύνολο όπου αυτή ορίζεται:

α) $f(x)=x^x$ β) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

γ) $f(x)=\log_{\sigma\upsilon\nu\chi}$ημχ $\chi\in(0, \pi/2)$ δ) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

ε) $f(x)=1+\sqrt[5]{(x+1)^4}$

19. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_o=1$ με $f(1)=2$και για κάθε $\chi \in \Re$ είναι $f(x^2)=f(x)$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 1}\frac{x.f(x)-2}{x-1}$.
20. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο α με $f'(\alpha)=2$ και $f(\alpha)=0$. Να βρείτε το $\lim_{x\to a}\frac{\eta\mu f(x)}{x-a}$
21. Αν η συνάρτηση f είναι 1-1 και παραγωγίσιμη στο A=(-1, 1) με σύνολο τιμών f(A)=(-1, 1) και $f'(x) = \sqrt{1-f^2(x)}$, να βρεθεί η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης : $(f^{-1})(x)$.
22. Αν $f'(x)=\eta\mu(\ln\frac{1}{\sqrt{x}})$, $e^{-\pi} < x < e^{\pi}$ και f αντιστρέψιμη συνάρτηση με

$f(e^{\frac{\pi}{3}})=e^{\frac{\pi}{4}}$, να βρεθεί ο αριθμός $(f^{-1})'(e^{\frac{\pi}{4}})$.

23.Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\Re$ με $f(x.\psi)=f(x)+f(\psi)$ για κάθε $x,\psi\in(0,+\infty)$.Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο$(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{f'(x)}{\psi}=\frac{f'(\psi)}{x}$ για κάθε $x,\psi\in(0,+\infty)$.

β)αν $f'(1)=1$, τότε $f'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$.

24.Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\alpha x^2+\beta x-2$ και $g(x)=1-1/x$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_o=1$.

25.Να βρεθεί ο $\alpha\in\Re$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3\chi^2+\alpha\chi+2$ και $g(x)=\frac{x-1}{x}$ να έχουν κοινή εφαπτομένη σ’ ένα κοινό τους σημείο.

26.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-2$.Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία $\psi=\lambda\chi-3$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f .

27.Να βρεθεί ο $\alpha\in\Re$ ώστε η ευθεία $\psi=9\chi-14$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της $f(x)=\chi^3-3\alpha\chi+2$.

28.Έστω η συνάρτηση f(x) παραγωγίσιμη στο $\Re$. Αν η ευθεία με εξίσωση $\psi=2\chi$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\chi_1=-1$, να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f\left(-\frac{1}{x^2}\right)$στο σημείο με τετμημένη $\chi_o=1$.

29.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\chi^2-4\chi+5$, $g(x)=\chi^2+2\chi-4$. Να βρεθεί η κοινή εφαπτομένη των γραφικών τους παραστάσεων.

30.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\chi^3-(\alpha+1)\chi-6\alpha+1$.Ν’ αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από σταθερό σημείο Α για κάθε $\alpha\in\Re$.Να βρείτε για ποια τιμή του α η ευθεία ΟΑ είναι εφαπτομένη της C_f στο Α.

31.Έστω η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $2f(x)=1+xf^3(x)$ για κάθε $\chi\in\Re$. Να δειχθεί ότι η ευθεία (ε):$\psi=-\chi+2$ εφάπτεται στην C_f.

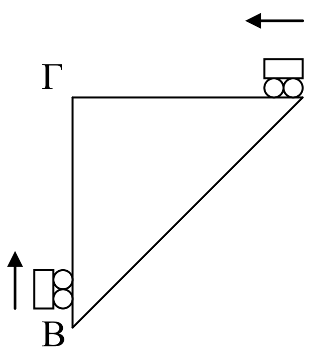
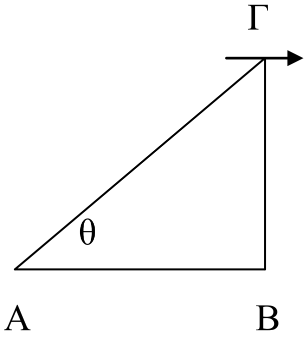
32.Να βρεθεί ο $\alpha\in\Re_+^*$ ώστε η ευθεία ψ=x να είναι εφαπτομένη της καμπύλης $\psi=\alpha^x$.

33.Να βρείτε την συνθήκη που πρέπει να ισχύει , ώστε από το σημείο Μ(κ, λ) να διέρχονται 2 εφαπτομένες της παραβολής $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha>0$.[Απ. $\lambda<\alpha\kappa^2+\beta\kappa+\gamma$]

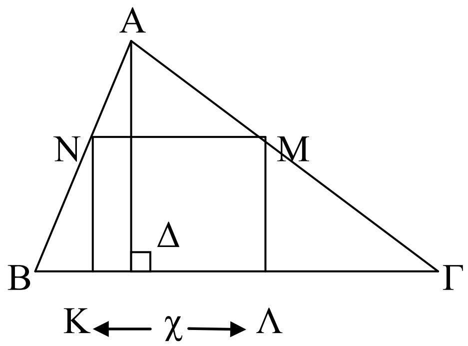
34.Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$ $(\alpha\neq0)$ και τα σημεία Α, Β της γραφικής παράστασης C_f με τετμημένες x_1 , x_2 αντίστοιχα

α)Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα Α και Β , τέμνονται σε σημείο Μ του άξονα ψ΄ψ αν και μόνο αν $x_1=-x_2$.

β)Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α, Β, Μ ώστε το τρίγωνο ΑΒΜ να είναι ορθογώνιο στο Μ .

	35.Δυο αυτοκίνητα κινούνται κατά μήκος των δρόμων ΑΓ και ΒΓ με ταχύτητες 70 km/h και 60 km/h αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασής τους ΑΒ ως προς το χρόνο t, τη χρονική t_o στιγμή κατά την οποία το αυτοκίνητο Α απέχει από τη διασταύρωση 800 m και το δεύτερο 600 m.
36.Ένα αεροπλάνο κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα 800 km/h και σε ύψος 7 km από το έδαφος. Σε κάποια χρονική στιγμή t_o η οριζόντια απόστασή του από ένα αντικείμενο Α στο έδαφος είναι ΑΒ=4 km. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ=ΓΑΒ τη χρονική στιγμή t_o.	

37.Οι διαστάσεις χ και ψ ενός ορθογωνίου αυξάνουν με ρυθμό 2cm/sec και 4 cm/sec αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς το χρόνο t, τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία είναι χ=25cm και ψ=32cm. Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα όταν το χ μειώνεται με ρυθμό 2 cm/sec και τα υπόλοιπα δεδομένα είναι ίδια.

38.Σε τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ και ΑΔ=6 εγγράφουμε ορθογώνιο ΚΛΜΝ, όπως στο σχήμα. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση της βάσης του χ και να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ως προς το μήκος χ, όταν το εμβαδόν έχει τιμή 14,4 και τείνει να ελαττωθεί καθώς το χ αυξάνει.	

39.Σημείο βρίσκεται τη χρονική στιγμή 0 στο Α(0,2) ακίνητο και αρχίζει να κινείται επί της ευθείας (ε): χ-ψ+2=0 με κατεύθυνση προς τον άξονα χ΄χ. Η κίνησή του είναι ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$ μον/sec^2. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου τη χρονική στιγμή t=3sec.