1. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(a) = g(a)$, $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = m$. Να δείξετε ότι $l = m$.

2. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

3. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l^2$ και $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = 2l$, όπου $l \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = 0$ και να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $g(x)$.

4. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = x$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

5. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to 1} (f^3(x) - 4f^2(x) + 6f(x)) = 4$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

6. Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) < 0 < g(x)$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = 0$. Να δ.ο. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

7. Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{f^2(x)}{x^2} + g^2(x) \right) = 0$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

8. Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $2f(x) + g(x) < 0 < g(x)$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to 0} (g(x) - 2f(x)) = 0$. Να δ.ο. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

9. Έστω $f: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ ↑ με $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$.

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(2022x)}{f(x)} = 1$.

10. Αν $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x^2+2x)}{x^2-2x}$.

11. Αν $\lim\limits_{x\to 1} \left(4f(x) - f^2(x)\right) = 4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

12. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-\alpha x+\alpha^2-3\alpha}{x-2} = 3$

13. Αν $\lim\limits_{x\to 1} \left(f^3(x) + f(x)\right) = 2$ να δ.ο. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

14. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (1) $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2022$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

15. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-1}{x-1} = -2$. Να βρείτε

το $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{f(x)+3} - \sqrt[3]{5f(x)+3}}{x-1}$.

16. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2}{f(x)+3} = 0$. Να βρείτε

το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

17. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άρτια:

α) Αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} \left(f(x-2) + f(2-x)\right)$

β) Αν $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 4$, να βρείτε $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$.

18. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f^2(x) - 2\alpha f(x)\right) = -\alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, βρείτε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

19. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy$ (1) $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Να δ.ο. $f(0) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.