

1. Αν για μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $(f \circ f)(x) = x$  (1) για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g(x) = x + f(x)$  είναι 1-1 στο  $\mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι  $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

2. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = (f \circ f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Αν υπάρχει μοναδικός αριθμός  $a \in \mathbb{R}$  με  $g(a) = a$  να δείξετε ότι  $f(a) = a$ .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  με  $f^2(x) = f(x) \cdot f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι άρτια

β) Αν επιπλέον, η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη 2, να απλοποιήσετε τον τύπο της  $f$  και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία της.

γ) Δίνεται η  $g(x) = x^3 - 2$ . Να μελετήσετε την  $f \circ g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 - 2x + 2, x \in \mathbb{R}$  και

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι η  $g$  παρουσιάζει μέγιστο, το 1

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$(x^2 - 2x + 2)^2 - 2 \cdot (x^2 - 2x + 2) + 2 = \frac{\frac{4x}{x^2 + 1}}{\frac{4x^2}{(x^2 + 1)^2} + 1}$$

5. Έστω  $f: A = (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  γνησίως αύξουσα στο  $A$

με  $f(A) = (1, +\infty)$  και  $g(x) = \frac{5-2x}{x-1}$ ,  $x \in (1, +\infty)$

α) Να μελετήσετε την  $g$  ως προς τη μονοτονία και να

βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να ορίσετε την  $h(x) = (g \circ f)(x)$  και να δείξετε ότι το

σύνολο τιμών της είναι το  $(-2, +\infty)$

γ) Αν επιπλέον ισχύει  $f(f(x)) = x \quad \forall x \in A = (1, +\infty)$ ,

να δείξετε ότι  $f(x) = x \quad \forall x \in A$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \ln x$  με  $x > 0$

η οποία έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη

β) Να ληθεί η ανίσωση  $f^{-1}(x) > 2 - x$ .

7. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(f(x)) = x + 2 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι: α)  $f(A) = \mathbb{R}$  και

β)  $f^{-1}(x) = f(x) - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = x$ .