

(1)

1. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, άρτια και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Να δ.ο. $f \downarrow$ στο $(-\infty, 0]$.
2. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, περιττή και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Να δ.ο. $f(0) = 0$ και $f \uparrow$ στο \mathbb{R} .
3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
4. Ομοίως οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - x^2 + 6|x|$ και $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
5. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:
- α) $x^{11} + 2x^7 + 3x^5 + 5x^3 + 7x < 18$ β) $3^x + 4^x + 5^x > 6^x$
- γ) $\ln x - \ln x - 2 \ln x - x - 1 < 0$, $x \in [0, 1/2)$
- δ) $e^x + x < 1$ ε) $3^x + 4^x > 2 \cdot 5^x$ στ) $x \cdot \ln x \leq e$
- ζ) $\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln x > x + \ln x$ η) $e^{x^2} - e^x + \ln x \leq 0$
- θ) $4(e^{3-x^2} - e^{3-x}) < x \cdot (x-1)$ ι) $e^{x^2-1} - e^{x+2} > x - x^2 + 3$
- ια) $2^{3x-x^2} - x^2 > 2^{6-2x} - 5x + 6$ ιβ) $x + x^3 + x^5 \geq 2 \cdot (1 - e^x)$
6. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι \uparrow , να λύσετε την ανισότητα:
- $$f(x^5 + x^2 - 1) - f(1 - x + x^2) < 2 - x - x^5$$

7. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς φθίνουσα με

$$f(3-x) + f(x+5) = 0 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Να λυθεί η ανίσωση}$$

$$f(x^2 + 2x - 4) < 0.$$

8. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Να δ.ο. η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{4f(x)}{1+f^2(x)} \text{ έχει ελάχιστο το } -2 \text{ και μέγιστο το } 2.$$

9. Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα:

$$f^2(x) + g^2(x) = 4 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Αν οι } C_f, C_g \text{ τέμνονται πάνω}$$

στην ευθεία $x=3$, να δ.ο. η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ έχει

μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

10. Να αποδείξετε τη γνωστή ανισότητα γιας πραγματικούς

$$\text{αριθμούς} \quad (ax+by)^2 \leq (a^2+b^2) \cdot (x^2+y^2) \quad \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}.$$

11. Για 2 συναρτήσεις f, g ισχύει $f^2(x) + g^2(x) = 1 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Να δ.ο. η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot f(4-x) + g(x) \cdot g(4-x)$

έχει μέγιστο.

12. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(0) = 1$, $f \uparrow$ στο \mathbb{R} . Να λυθεί

$$\text{η εξίσωση} \quad \frac{f^2(x) + 1}{2f(x)} = 6 \ln x.$$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$a) \quad 2^x + 2^{-x} = 2 \ln \frac{x}{3}$$

$$b) \quad 2^{|x|} = n \ln x^2$$