

Θέμα Δ

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(1) = 2$, $f'(1) = 0$.

Αν δίνονται τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Δ1) Να βρεθεί η μονοτονία της f και να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = [2, +\infty)$

Δ2) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x) - 3) = 2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες α , β στο A .

Δ3) Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της f που διέρχεται από το σημείο $M(0,4)$.

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x - 2$, $A = (0, +\infty)$.

Γ1) Να βρεθεί το σύνολο τιμών $f(A)$ και το πλήθος ριζών της εξίσωσης $E: x^2 + 2 = x(\alpha + \ln x + 2)$ για τις διάφορες τιμές του α .

Γ2) Να βρεθούν τα κοίλα και η εφαπτομένη ε της f στο $M(1, f(1))$

Γ3) Να λυθεί η ανίσωση $e^{3x^2 - 5x + 2} > X^x$, $x > 0$

Γ4) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) - f(2) = f'(2)(x - 2)$

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με συνεχή παράγωγο και $f'(1) \neq -1$. Αν ισχύει ότι $f(f^2(x)) + f^2(x) = f(x) + x$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 1$

Γ1) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Γ2) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f(x^3) = f(\alpha + 3x), \quad \alpha \in \mathbb{R} \cap (0, +\infty)$$

Γ3) Να βρείτε τη μονοτονία της $g(x) = f(x) + x$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}$

Θέμα Δ

Έστω ότι f'' συνεχής στο \mathbb{R} με

$$f''(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f(0) + 1, \quad f(1) > 1$$

Δ1) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} και να βρεθεί η εφαπτομένη στο 0 .

Δ2) Έστω η συνάρτηση g που είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g(0) = 0$

Αν η $h(x) = |f(x) - g'(0) \cdot x|$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x = 0$

Δ3) Να δείξετε ότι η εξίσωση $E: \frac{f(x) - x}{x - e} = \frac{x - e}{\ln x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, e)$.