Θέμα 5

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right),\ \text{για κάθε}\ x,y>0$$

και η εξίσωση $f(x)=0$ που έχει μοναδική ρίζα.

α. Να βρείτε το $f(1)$.

β. Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-2)+f(x)=f(5x-6)$.

δ. Αν $f(x)<0$ για κάθε $x>1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Θέμα 6

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι συνεχής και για την οποία ισχύει:

$$(x-1)f(x)=\alpha x^2+\beta x-2,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

~~και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1, 3).~~

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β. $\alpha=1,\ \beta=1$

β. Να βρείτε τον τύπο της f.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x)}+f(x)-1=0$.

δ. Να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]$.

Θέμα 7

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και $f(1)=1$. Έστω επιπλέον η συνάρτηση $g(x)=f^3(x)+(f\circ f)(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι αντιστρέψιμες.

β. Να δείξετε ότι $(g\circ f^{-1})(x)=x^3+f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^3+f(x)=2$.

δ. Αν η f είναι συνεχής και ισχύει $f(\alpha)+f(2\alpha)=3\alpha$, Για κάποιο α στο $\alpha>0$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x)-\alpha}{x-2\alpha}=\frac{f(x)-2\alpha}{x-\alpha}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha, 2\alpha)$.

Θέμα 8

Έστω $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής και γνησίως αύξουσα, για την οποία ισχύει: $x^2 < f(x) < x^2 + 1$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

α. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = 2x$ σ' ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} + e^{-x} - 1$, $x \geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x + f(x) = e^x f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 2)$.

δ. Να βρείτε τα όρια: **i.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \ln x\right]$ **ii.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\eta\mu f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$

Θέμα 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x} + x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{2x} + xe^x) < \dfrac{e^2 + e - 1}{e}$.

γ. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \ln\alpha - 1 = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(-\infty, 0)$, για κάθε $\alpha > e$.

Θέμα 10

Έστω $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής με $f(1) = 1$, $f(x) \neq 0$, $x > 0$ και η συνάρτηση $g(x) = xf(x) - 1$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^{10}) = f(x^7) + f(x^{13})$

γ. Να δείξετε ότι:

- $f(x) > \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x \in (0,1)$ και $f(x) < \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ε. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \ln x_0$.