1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1] και για κάθε $\chi \in [0, 1]$ είναι $0<f(x)<1$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) + f(\xi)=\xi^2+\xi$.

2. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g $[\alpha, \beta]\rightarrow[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $2f(\xi) =g(f(\xi))+g(\xi)$.

3. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g $[\alpha, \beta]\rightarrow[\alpha, \beta]$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ η g γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ και $g(\alpha)=\alpha$, $g(\beta)=\beta$. Να δείξετε ότι οι C_f ,C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

4. Δίνεται η συνάρτηση f $[0, 1] \rightarrow (0, 1)$ και ισχύει $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$ για κάθε

   x, y $\in [0, 1]$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.

5. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\Re$ με $f^2(\chi)= \dfrac{1}{1+g^2(x)}$ για κάθε $\chi \in\Re$, να δείξετε ότι υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f(\xi)=$συνξ και $|g(\xi)| = |$εφξ$|$

6. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα [0, 1], με $f(0)=f(1)$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ με:

   α) $f(\xi)= f\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right)$ β) $f(\xi)= f\left(\xi+\dfrac{1}{3}\right)$

7. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$.Να δείξετε ότι υπάρχει ξ τέτοιο ώστε:

   α) $f(\xi)= f\left(\xi+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)$, β) $f(\xi)= f\left(\xi+\dfrac{\beta-\alpha}{3}\right)$

8. Αν οι αριθμοί $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu$ ανήκουν στο διάστημα [0, 1], ν' αποδείξετε ότι υπάρχει $\chi_o\in[0, 1]$, ώστε $\dfrac{|x_o-x_1|+|x_0-x_2|+....+|x_o-x_\nu|}{\nu}=\dfrac{1}{2}$

9. Αν η f είναι συνεχής στο [0, 5] με $f(0)=-5$ και $f(5)=4$, ν' αποδείξετε ότι υπάρχουν

   $\chi_1, \chi_2 \in (0, 5)$ με $\chi_1\neq\chi_2$ και $f^2(\chi_1)=f^2(\chi_2)=9$.

10. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [2, 4] με $f(2)\in[1, 2]$, ν' αποδείξετε ότι υπάρχει $\chi_o\in[2, 4)$, ώστε $f^2(\chi_o)-3f(\chi_o)+\chi_o=0$.

11. Αν η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής και το διάγραμμά της έχει με την ευθεία $\psi=2\chi$ δυο κοινά σημεία με ετερόσημες τετμημένες, ν' αποδείξετε ότι το διάγραμμα της f έχει κοινό σημείο με την ευθεία $\psi=3\chi$.

12. Έστω η συνάρτηση f: [0, 4] $\to \Re$ συνεχής με f(0) = -2 και f(4)=6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $|f(x)| = x$, έχει δύο τουλάχιστον, λύσεις στο (0, 4).

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^3(\chi)-2f^2(\chi)+2f(\chi)=3\chi\eta\mu\chi-2$ για κάθε $\chi \in \Re$. Να δείξετε ότι το διάγραμμα της f τέμνει τον άξονα χ΄χ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\chi_o \in (0, 1)$.

14. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\Re$ με f(x)+f(x+5)=0, $\forall x \in \Re$. Να δείξετε ότι: α) η f είναι περιοδική και β) υπάρχουν άπειροι αριθμοί θ με f(θ)=f(θ+5).

15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 σ' ένα διάστημα Δ, ν' αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

16. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f: [1, 4] $\to \Re$, με τιμές θετικές ισχύει $f^3(4)=f(1)f(2)f(3)$, ν' αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

17. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^2(\chi)=1+2f(\chi)\sigma\upsilon\nu\chi$ για κάθε $\chi \in \Re$.

18. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $\Re$, με (fog)(x)=(gof)(x), $\forall x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση f(x)=g(x) είναι αδύνατη, τότε και η εξίσωση $f(f(x)) = g(g(x))$ είναι αδύνατη.

19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$, ν' αποδείξετε ότι υπάρχει

$\chi_o \in (0, 1)$, ώστε $f(\chi_o)=\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6} f\left(\frac{1}{6}\right)$.

20. Αν η συνάρτηση f:[α, β]$\to\Re$ είναι συνεχής, ν' αποδείξετε ότι υπάρχει ξ$\in$[α, β], ώστε

f(x)-f(ξ)$\leq$x-ξ για κάθε x$\in$[α, β].

21. Η συνάρτηση f : $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \to$ IR είναι συνεχής με $x^2 - f^2(x) = 1$, για κάθε x $\neq$-1,1, f(2) > 0 και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

22. Η συνάρτηση f : IR $\to$ IR είναι συνεχής με f(0) = 2 και για κάθε πραγματικό αριθμό x ικανοποιεί τη σχέση:

$f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4$ (1).

Δ1. να βρείτε τις τιμές f(2) , f(-2).

Δ2. ***i)*** να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (-2, 0)$, τέτοιο ώστε $f(x_o) = 0$ και $f(-\sqrt{2}) = 0$

ii) να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) = 0$

Δ3. να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) + 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
