1. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+x} + \sqrt{x^2-2} - \sqrt{9x^2-x} \right)$$

$$L_2 = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+2} \right)$$

2. Να βρείτε τον τύπο της πολυωνυμικής συνάρτησης f με $f(0) = -4$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x+\alpha} = 2$, $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x+\alpha} = \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3. Αν είναι $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(2x)}{x} = 4$, $\lim_{x \to +\infty} \left(3f(x) - 5x \right) = 3$, να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(3x)+8x}{f(x)+5x+2}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 f(x) - 5x^3 + 1}{x f(4x) - 7x^2}$

4. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{4x^2+1} + \alpha x + \beta \right) = 3$$

5. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = 27x^3$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$ β) Να δ.ο. $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$, δ) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. ε) Να δ.ο. $f(x) \leq 3x$ $\forall x \geq 0$

στ) Να δ.ο. f συνεχής στο $\mathbb{R}$, ζ) Να βρείτε τα όρια:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^3}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

6. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 2$

Να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+2022)}{f(x)}$.

7. Έστω $f: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$, $f \uparrow$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(2022x)}{f(x)}$.

8. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $|f(x)-f(y)| \le \dfrac{|x-y|}{2}$ (1)

$\forall x,y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: α) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $f(x)=x$ έχει το πολύ μια ρίζα.

γ) Αν $a > \frac{1}{2}$, τότε η συνάρτηση $g(x)=f(x)+ax$ είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$f^2(x) + e^2 g^2(x) + e^{2x} \le 2x f(x) + 2e^{x+1} g(x) - 2x + 1$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 1$.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu\frac{1}{x}, & \text{αν } x > \lambda \\ \dfrac{3x^3+2x^2+3x}{x^2+1}, & \text{αν } x \le \lambda \end{cases}$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$,

ώστε η f να είναι συνεχής.

11. Έστω $f, g: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0,+\infty)$. Να δ.ο. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 1$

12. Να βρείτε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[2x - \ln\left(e^{2x}+e^x+1\right)\right]$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, όπου

$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.