

ΘΕΜΑ 9ο : (18ο – 2014):

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = \frac{e^{2x}}{F(x) - x} + 1$, όπου F είναι μία αρχική συνάρτηση της f στο \mathbb{R}

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

β) Αν $f(x) = e^x + 1$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{f(x)} dx$

ii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon \varphi x) - f(\eta \mu x)}{\varepsilon \varphi x - \eta \mu x}$

iii) Αν μια συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0, 1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$, ώστε

$$\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx = h(\xi) \int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

ΘΕΜΑ 19ο : (34ο – 2014):

Έστω η συνάρτηση $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και κυρτή στο $(2, +\infty)$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9)f(x+6) = (7x-32)f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4, 5)$

Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3} = \frac{1}{6}$

- γ) i) Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f'(3)$
- ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

ΘΕΜΑ 20ο : (36ο – 2014):

Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(0) = 0$ και $F'(x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι κοίλη στο \mathbb{R}

γ) Να αποδείξετε ότι $F(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Να αποδείξετε ότι $F(x+1) - F(x) < F'(x) < F(x) - F(x-1)$ για $x \geq 1$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x)$