Έστω η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{\frac{\alpha}{x}}$, $x>0, \alpha>0$.

Αν η ευθεία (ε): $\sqrt{e}x-2y+2\sqrt{e}=0$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2,f(2))$, τότε:

Δ1. Να δείξετε ότι α=1. **(Μονάδες 7)**

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\frac{1}{x-1}+\ln(x-1)=\frac{1}{\ln x}+\ln(\ln x)$ είναι αδύνατη για χ>e

(Μονάδες 7)

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sigma\upsilon\nu x-x}{2f(x)-\sqrt{e}x-2\sqrt{e}}$. **(Μονάδες 6)**

Δ4. Να δείξετε ότι $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}dx>e\ln 2$. **(Μονάδες 5)**

Θέμα 79

Μπάρλας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ. Να υπολογίσετε το $\int_{\ln 3}^{\ln\frac{1}{3}} f(x)dx$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x+f(2x)$.

ε. Να δείξετε ότι $f(\eta\mu x+\frac{1}{6}x^3)>f(x)$, για κάθε $x>0$.

Θέμα 69 Μπάρλας

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0)=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\frac{x}{f(x)}+\frac{1}{f'(x)}=1 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή στη συνέχεια ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

γ. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και να σχεδιάσετε τη C_f .

δ. Να δείξετε ότι $f'(2x)+f(x)>f'(x)+2x$, για κάθε $x>0$.

Θέμα 56 ΜΠΑΡΛΑΣ

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(x)=\dfrac{x}{\ln(1+x)}$, $x>0$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

β. Να δείξετε ότι $f(x)<2^{f(x)}-1$, για κάθε $x>0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2)+\ln x=f(x)$.

δ. Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_e^{e^4}\frac{f(\sqrt{\ln x})}{x}dx<\frac{6}{\ln 3}$.