4^{o} ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ **ΣΧ. ΕΤΟΣ 2022-23**

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΤΑΞΗ Γ΄

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Θέμα $1^{ο}$

Α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν:

- Η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των *f(α)* και *f(β)* υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

(Μονάδες 10)

Β. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle ***(Μονάδες 05)***

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή , ή **Λάθος** , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

ii) Η εικόνα *f(Δ)* ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης *f* είναι διάστημα.

iii) Αν *f* συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

iv) Αν το $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της *f* και η *f* είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f''(x_0) = 0$.

v) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

(Μονάδες 2x5=10)

Θέμα $2^{ο}$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x-3}$.

Α) Να αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 6)

Β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

(Μονάδες 9)

Γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$$

(Μονάδες 10)

Θέμα 3ο

Έστω f συνεχή συνάρτηση στο διάστημα [-1,1], για την οποία ισχύει: $x^2 + f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in [-1,1]$

Α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης *f(x)=0.* ***(Μονάδες 8)***

Β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα (-1,1). ***(Μονάδες 8)***

Γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 9)

Θέμα 4ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$, $x \in R$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in R$.

Α) Να αποδείξτε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in R$.

(Μονάδες 5)

Β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z.

(i) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$.

(Μονάδες 6)

(ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x, το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

Γ) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$, τον άξονα $x'x$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = ln2$ και $x = 1$, είναι $ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 7)

Πετρούπολη 26/05/2023

Ο Διευθυντής ***Οι εισηγητές***

Βλάχος Σ.
Καλαμάτας Α.
Γαλάνης Δ.

Αγαλιανός Ι.
Χημικός ΠΕ04.02