

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \ln(x - 5 + e) + 2 \cdot (\alpha + 1) \cdot e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$$

i) Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$.

ii) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \beta x + \alpha}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f

να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε:

$$f^2(x) + g^2(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$.

4. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^5(x) + f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

5. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 10.$$

i) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = -1$.

iii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 5}{x + 1}$.

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0, \pi]$ και ισχύει

$$1 + 2\sqrt{\eta\mu x} \leq f(x) \leq 2 + \eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in [0, \pi]$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$.

ii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{f(x) - 3}$.

iii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|3 - f(x)| - xf(x) - 3}{f(x) - 3}$.

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιές λανθασμένες (Λ).

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $f(x) > 0$.
3. Μπορεί μια συνάρτηση f να είναι συνεχής σ' ένα σημείο $x_0 \notin D_f$.
4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η συνάρτηση της $g + f$ δεν είναι συνεχής στο x_0 .
5. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 .
7. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
8. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 .

1. Αν f συνάρτηση για την οποία ισχύει $xf(x) - x^4 + \eta\mu(ax) = x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, και $f(0) = -a \neq 0$, τότε:
- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
 - Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο \mathbb{R} .
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ ώστε $a\gamma + b\gamma + \gamma^2 < 0$.
Να αποδείξετε ότι:
Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες από τις οποίες τουλάχιστον η μία βρίσκεται στο $(0,1)$.
3. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0,1]$ και συνεχής με $f(0) = f(1)$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{v}\right)$ όπου $v \in \mathbb{N}^*$.
- Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g ;
 - Όταν $v > 1$ να αποδείξετε ότι $g(0) + g\left(\frac{1}{v}\right) + g\left(\frac{2}{v}\right) + \dots + g\left(\frac{v-1}{v}\right) = 0$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f\left(x + \frac{1}{v}\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1)$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.
4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta$, a, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί με $\beta > 0$, $a + \beta < -1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις λύσεις στο \mathbb{R} .
5. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο \mathbb{R} με $f(x) + g(x) = \beta x$, $\beta \in \mathbb{R}$ και $f(x) = (a^2 + 1)x^2 - 2x - 3$, $a \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$ όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
6. Αν για τις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ συναρτήσεις f, g ισχύουν οι σχέσεις $f(\alpha) = g(\beta) = \alpha$ και $f(\beta) = g(\alpha) = \beta$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $3f(\xi) + 4g(\xi) = 7\xi$.
7. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 9$ και $f(1) = 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \sqrt{f(x)} = 3$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0,1)$.

8. Έστω f, g συνεχείς στο $A = [0,1]$ με $f(A) = g(A) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

i) Να δείξετε ότι $0 \leq f(x) + g(x) \leq 1$, για κάθε $x \in A$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$, τέτοιο ώστε $f(x_0) + g(x_0) = x_0$.

9. Έστω συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 5x$.

Για κάθε $x \in (0,5)$ να δείξετε ότι:

i) η f δεν έχει ρίζες στο $(0,5)$ ii) η f έχει σταθερό πρόσημο στο $(0,5)$.

iii) Να βρείτε τον τύπο της f στο $(0,5)$, αν επιπλέον είναι γνωστό ότι $f(1) = -2$.

10. Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$ για την οποία ισχύει:

$$[f(a)]^2 + [f(\beta)]^2 + 2 \leq 2[f(a) - f(\beta)].$$

Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος (a, β) .

11. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} , τέτοια ώστε $f(x) \cdot [f(x) + 2e^x] = x^2$ με $f(0) = 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

12. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} , τέτοια ώστε:

$$f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x) = x^2 - 4x + 3 + e^{-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της τέμνει τον $x'x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (1,2)$.

13. Δίνεται η εξίσωση $\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0$, όπου $\kappa\lambda\mu \neq 0$.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες αυτές, να δείξετε ότι $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.

14. Δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ με $f([a, \beta]) = g([a, \beta]) = [a, \beta]$

και $a \neq 0$. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$ και η

g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, \beta]$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον

ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε: $\beta \cdot f(\xi) + a \cdot g(\xi) = \xi \cdot (a + \beta)$.