

Τάξη: Γ

Τμήμα Γ21

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Εξεταζόμενη ύλη : Μέχρι Bolzano

χρόνος : 3 διδακτικές ώρες

Επώνυμο:

Όνομα:

A1	A2	A3	A4	A
B1	B2	B3	B4	B
Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Γ
Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ
Σ	Υ	Ν	Ο	Λ

ΘΕΜΑ Α

A1 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[α,β]$ και πραγματικός αριθμός $η$ με $f(α) < η < f(β)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_ο \in (α,β)$ με $f(x_ο) = η$. (Μονάδες 10)

A2 Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης κι ελάχιστης τιμής (Μονάδες 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση δεν είναι 1-1, τότε δεν είναι γνησίως μονότονη (Μονάδες 2)

β. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο πεδίο ορισμού της, τότε διατηρεί πρόσημο. (Μονάδες 2)

γ. Η εικόνα $f(Δ)$, ενός διαστήματος $Δ$ μέσω της συνεχούς συνάρτησης f , είναι διάστημα. (Μονάδες 2)

δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[α,β]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(α), f(β)]$. (Μονάδες 2)

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_ο} f(x) = l$, τότε $l > 0$ (Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 7)

B2. Να ορίσετε την αντίστροφη της f (Μονάδες 6)

B3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot \eta\mu(x-1))$ (Μονάδες 6)

B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} ((x-1) \cdot \eta\mu(f(x)))$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathfrak{R}^* \rightarrow \mathfrak{R}$, συνεχής, άρτια, με $g(1)=1$, $x^2 \cdot g^2(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}^*$.

Γ1. Να βρείτε την $g(x)$ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 8)

Γ2. Έστω σημείο $M(x,ψ)$ της γραφικής παράστασης της g και O η αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι η απόσταση

$d(x)=(OM)$, δίνεται από τον τύπο $d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$, το ελάχιστο της οποίας είναι $\sqrt{2}$. (Μονάδες 5)

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $d(x) = \sqrt{2} \eta\mu x$ (Μονάδες 6)

Γ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^{g(x)}$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \cdot g(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

και $f(1) > 3$, $g(2) > 2$

Δ1. Να δείξετε ότι $g(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = x_0$.

(Μονάδες 5)

Αν, επιπλέον, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , να απαντήσετε στα 2 επόμενα ερωτήματα:

Δ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(Μονάδες 7)

Δ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g

(Μονάδες 8)

Να έχετε επιτυχία!!