

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Εξεταζόμενη ύλη : συναρτήσεις-όρια χρόνος : 2 διδακτικές ώρες

Επώνυμο:

Όνομα:

ΘΕΜΑ Α

A1. Να δείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0). \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

A2 Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$; (Μονάδες 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση δεν είναι 1-1, τότε δεν είναι γνησίως μονότονη. (Μονάδες 2)

β. Στη σύνθεση των συναρτήσεων ισχύει η ιδιότητα $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. (Μονάδες 2)

γ. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $f(x) > 3$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 3$ (Μονάδες 2)

δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_{\frac{1}{3}} x \right) = -\infty$ (Μονάδες 2)

ε. Υπάρχουν συναρτήσεις f με $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = l > 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{l}$. (Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $|f(x) - g(x)| \leq |x^2 \cdot g(x)|$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ (Μονάδες 6)

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (Μονάδες 6)

B3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ (Μονάδες 6)

B4. Αν επιπλέον $f(\mathbb{R}) = [0, 3]$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \pi} (\eta\mu x \cdot f(x))$ (Μονάδες 7)

B5. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνουν τον άξονα x στα ίδια ακριβώς σημεία με τετμημένες $x \in (-1,1)$. (Το ερώτημα δεν ετέθη τελικώς)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **(Μονάδες 3)**

Γ2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{8}}{ημx}$ **(Μονάδες 7)**

Γ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f^2(x) - x + 4}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{8}(x-4)\right) - 1}$. **(Μονάδες 8)**

Γ4. Να δείξετε ότι κάθε σημείο του γραφήματος της f , απέχει σταθερή απόσταση από το σημείο $K(1,0)$ **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ με $(f \circ f)(x) = x - 2$ (1) για κάθε $x \in \mathfrak{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και ότι $f(x+2) = f(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να δείξετε ότι η f δεν έχει μέγιστο.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathfrak{R} .

(Μονάδες 6)

Δ4. Αν επιπλέον $f(0) > 0$, να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο \mathfrak{R} .

(Μονάδες 7)

«Έν οἶδα, ὅτι οὐδὲν οἶδα»