

Τάξη: Γ

Τμήματα Γ21, Γ22

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Εξεταζόμενη ύλη: Μέχρι θεωρήματα συνέχειας

χρόνος : 3 διδακτικές ώρες

Επώνυμο:

Όνομα:

A1	A2	A3	A4	A
B1	B2	B3	B4	B
Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Γ
Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ
	Σ	Υ	Ν	Ο

ΘΕΜΑ Α

A1 Έστω το πολώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$ με πραγματικούς συντελεστές.

Να δείξετε ότι, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

(Μονάδες 10)

A2 Να διατυπώσετε το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

(Μονάδες 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

A) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

B) Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.

Γ) Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη.

Δ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1$.

E) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) \cdot f(\beta) > 0$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

(Μονάδες 2x5=10)**ΘΕΜΑ Β**

Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι $x \cdot f(x) - 4x^3 + x + \eta\mu x = 0$.

B1 Να ορίσετε τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

B2 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(Μονάδες 8)

B3 Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

(Μονάδες 5)

B4 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{f(x)} - 2x)$

(Μονάδες 6)**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$e^{f(x)} + f(x) - x = 1 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1 Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

(Μονάδες 6)

Αν $f^{-1}(x) = e^x + x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να λύσετε τα επόμενα ερωτήματα.

Γ2 Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$

(Μονάδες 2+4)

Γ3 Να βρείτε το πρόσημο της $f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

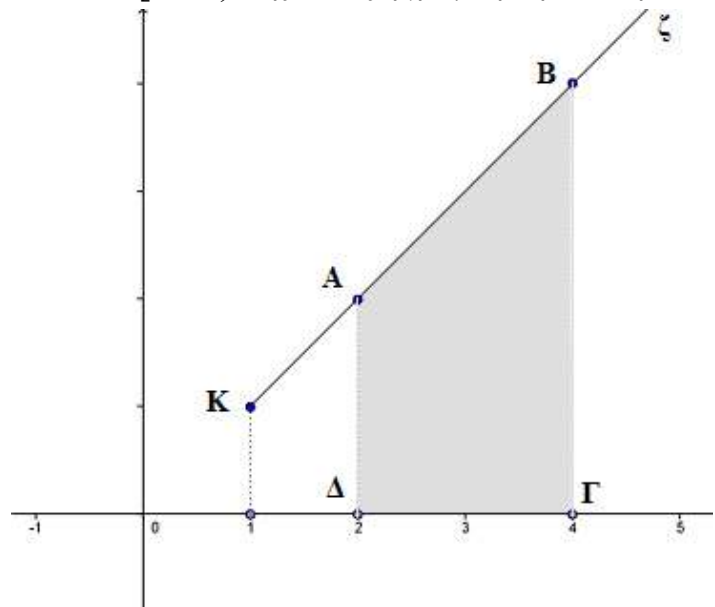
Γ4 Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(2x+1)} - e^{f(3x-2)} = 3 - x$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + \frac{7}{2}, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + a, & x \geq 1 \end{cases}$

και η συνάρτηση $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x \cdot f(x)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι η ημιευθεία Κζ που δίνεται στο διπλανό σχήμα. Δίνεται το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου ΑΒΓΔ που σχηματίζεται από την C_g , τις ευθείες $\chi=2$, $\chi=4$ και τον άξονα $\chi'\chi$, το οποίο ισούται με $(ΑΒΓΔ)=5$.



Δ1. Να δείξετε ότι $a = \frac{1}{2}$. **(Μονάδες 5)**

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , να κάνετε τη γραφική της παράσταση και να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $[1, +\infty)$ **(Μονάδες 6)**

Δ3. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(e^x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x))]$. **(Μονάδες 6)**

Δ4. Έστω η συνάρτηση $h(x) = \frac{-3}{x}$, $x \in [1, +\infty)$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = h^{-1}(x) + \frac{9}{2}$, όπου h^{-1} , η αντίστροφη της h . **(Μονάδες 7)**

Να έχετε επιτυχία!!