4ο ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
Ημερομηνία: 24 – 11 – 2022

Τάξη: Γ
Τμήμα Γ21

Α1	Α2	Α3	Α4	Α
Β1	**Β2**	**Β3**	**Β4**	**Β**
Γ1	**Γ2**	**Γ3**	**Γ4**	**Γ**
Δ1	**Δ2**	**Δ3**	**Δ4**	**Δ**
Σ Υ Ν Ο Λ Ο				

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Εξεταζόμενη ύλη : Μέχρι Bolzano χρόνος : 3 διδακτικές ώρες

Επώνυμο: **Όνομα:**

ΘΕΜΑ Α

Α1 Να δείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο P(χ) με πραγματικούς συνελεστές, ισχύει $\lim_{x\to x_o} P(x) = P(x_o)$.

(Μονάδες 7)

Α2 Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano. **(Μονάδες 4)**

Α3 Να εξηγήσετε γιατί η μορφή +∞-∞ στα όρια, είναι απροσδιόριστη. **(Μονάδες 4)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Α) Αν $f(x) = x + \sqrt{x}$ και $g(x) = x - \sqrt{x}$, τότε ορίζεται η συνάρτηση g.f με $(g.f)(x) = x^2 - x$ για κάθε $x \in \Re$.

Β) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $|f(x)| < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, για κάθε χ>0, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο.

Δ) Ισχύει $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$.

Ε) Υπάρχει συνάρτηση ορισμένη στο $\Re$, συνεχής στο [α,β] και ασυνεχής στο α. **(Μονάδες 2x5=10)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ με x>0 και $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$, με x≠1.

Β1 Να ορίσετε τη συνάρτηση fog. **(Μονάδες 6)**

Β2 Αν $(fog)(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0,1)$, να δείξετε ότι η fog αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της. **(Μονάδες 8)**

Β3 Να λύσετε την εξίσωση $(fog)(x) = f(x)$. **(Μονάδες 5)**

Β4 Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)= -x έχει μοναδική ρίζα $x_o \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \Re \to \Re$, για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$f^2(x) + g^2(x) = 1$ (1) για κάθε $x \in \Re$, $g(\chi) = f\left(\dfrac{\pi}{2} - \chi\right)$ (2) για κάθε $x \in \Re$,

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ (3) και $\lim_{x\to 0}g(x)=1$ (4). Να υπολογιστούν τα επόμενα όρια:

Γ1 $L_1=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x^2}$ $L_2=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}$ **(Μονάδες 8)**

Γ2 $L_3=\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x^2-3x+2}$ **(Μονάδες 4)**

Γ3 $L_4=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{g(x)-1}$ $L_5=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{g(x)-1}$ **(Μονάδες 8)**

Γ4 $L_6=\lim_{x\to \pi/2}\frac{f(x)-1}{16x^4-8\pi^2x^2+\pi^4}$ **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο A=[1, +∞) με $f^2(x)=2x-1-2\sqrt{x^2-x}$ για κάθε $x\in A$ και f(1)=1.

Δ1 Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ για κάθε $x\in A$, και στη συνέχεια ότι $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$, για κάθε $x\in A$. Κατόπιν να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **(Μονάδες 11)**

Δ2 Να λυθεί η ανίσωση f(ημx+2) < f(x+2). **(Μονάδες 5)**

Δ3 Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\sqrt[3]{f(2).f(e).f(3)}$.

(Μονάδες 4)

Δ4 Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=\sqrt{2x-1}$. **(Μονάδες 5)**

Να έχετε επιτυχία!!