Διαγωνισμα Μαθηματικών Γ21 : 24-11-22 (1)

Θέμα Α Α1. Θεωρία: Σχ. βιβλίο Σελ.49.

Α2. Σχ. βιβλίο: Σελ. 74. Α3 - Σελ. 62

Α4 Λ - Σ - Λ - Λ - Σ

Θέμα Β $\boxed{B1}$ $D_f=(0,+\infty)$ $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

$D_{f\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=(0,1)$, με $(f\circ g)(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

$g(x)\in D_f \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}>0 \Leftrightarrow x\cdot(1-x)>0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$

$\boxed{B2}$

$(f\circ g)(x)=\ln x-\ln(1-x)$. Για $x_1,x_2\in(0,1)$ με

$x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2$ (1)

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow 1-x_1>1-x_2 \Leftrightarrow \ln(1-x_1)>\ln(1-x_2)$

$\Leftrightarrow -\ln(1-x_1)<-\ln(1-x_2)$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \ln x_1-\ln(1-x_1)<\ln x_2-\ln(1-x_2) \Leftrightarrow (f\circ g)(x)<(f\circ g)_{x_2}$

Άρα $f\circ g\uparrow \Rightarrow 1-1 \Rightarrow$ αντιστρέφεται

Για τον τύπο της, λύνω την εξίσωση $(f\circ g)(x)=y$ ως προς x

$\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=e^y \Leftrightarrow x=e^y-x\cdot e^y \Leftrightarrow x(1+e^y)=e^y \Leftrightarrow$

$x=\frac{e^y}{1+e^y}$. Για το σύνολο τιμών της f έχω:

f συνεχής και $\uparrow$ στο $A=(0,1) \Rightarrow f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x), \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\right)=\mathbb{R}$.

όμως $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{1-x}=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{1-x}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)=\lim\limits_{u\to +\infty}(\ln u)=+\infty$

Άρα $(f\circ g)^{-1}(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{B3}$ Το π.ο. της εξίσωσης:

πρέπει $x \in D_{f\circ g}$ και $x \in D_f \Rightarrow x \in (0,1)$

Αφού f:1-1 τότε έχω $(f\circ g)(x) = f(x) \Leftrightarrow g(x) = x \Leftrightarrow$

$\frac{x}{1-x} = x \Leftrightarrow x = (1-x)x \Leftrightarrow x=0$ ή $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

Απορρίπτονται και οι δυο· άρα η εξίσωση αδύνατη.

$\boxed{B4}$ Έστω $A(x) = f(x)+x = \ln x + x$. συνεχής στο $[1/2, 1]$

με $A(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$ και $A(1/2) = \ln 1/2 + 1/2 = -\ln 2 + \frac{1}{2} < 0$

Είναι $-\ln 2 + \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \ln 2 \Leftrightarrow e^{1/2} < 2 \Leftrightarrow (e^{1/2})^2 < 2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e < 4$ που ισχύει. Άρα $A(1)\cdot A(1/2) < 0$ Από θεωρ.

Bolzano $\Rightarrow \exists x_0 \in (1/2, 1) : A(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -x_0$

Αφού $f \uparrow \Rightarrow A(x) \uparrow \Rightarrow$ η ρίζα μοναδική.

Θέμα Γ $\boxed{\Gamma 1}$

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{(g(x)-1)\cdot(g(x)+1)}{x^2\cdot(g(x)+1)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{g^2(x)-1}{x^2}\cdot\frac{1}{g(x)+1}\right] \overset{(1)}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{f^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{g(x)+1}\right) \overset{(3)}{=} -1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)+1} \overset{(4)}{=} -1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$L_2 = \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{Διότι·}$$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \le \frac{1}{|x|}$$ Διότι $(1) \Rightarrow f^2(x) = 1 - g^2(x) \le 1$

Άρα $-\frac{1}{|x|} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{1}{|x|}$

με $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = 0$.

Από κριτήριο παρεμβολής $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$

Γ2 $L_2 = \lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to1}\left(\frac{f(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x-2}\right) = 1\cdot\frac{1}{-1} = -1$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1} \overset{u=x-1}{=} \lim_{u\to0}\frac{f(u)}{u} \overset{(3)}{=} 1$

Γ3 $L_4 = \lim_{x\to0}\frac{ημ^2x}{g(x)-1} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{ημ^2x}{x^2}}{\frac{g(x)-1}{x^2}} \overset{(L_1)}{=} \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

$L_5 = \lim_{x\to0}\frac{συνx}{g(x)-1} = \lim_{x\to0}\left[συνx\cdot\frac{1}{g(x)-1}\right] = -\infty$

$\lim_{x\to0}\left(g(x)-1\right) \overset{(4)}{=} 0$ ενώ $g^2(x) = 1-f^2(x) \le 1 \Rightarrow |g(x)| \le 1$

$\Rightarrow -1 \le g(x) \le 1$ Άρα $g(x)-1 \le 0$ κοντά στο 0

Άρα $\lim_{x\to0}\frac{1}{g(x)-1} = -\infty$

Γ4 $L_6 = \lim_{x\to\pi/2}\frac{f(x)-1}{16x^4-8\pi^2x^2+\pi^4} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{f(x)-1}{(4x^2-\pi^2)^2} =$

$\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{f(x)-1}{(2x-\pi)^2}\cdot\frac{1}{(2x+\pi)^2}\right] = \frac{1}{4}\lim_{x\to\pi/2}\left[\underbrace{\frac{f(x)-1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}}_{A(x)}\cdot\frac{1}{(2x+\pi)^2}\right] = (*)$

Για το $\lim_{x\to\pi/2}A(x)$. Θέτω $u=\frac{\pi}{2}-x \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-u$ και όταν $x\to\pi/2$ $\Rightarrow u\to0$.

$\lim_{x\to\pi/2}A(x) = \lim_{x\to\pi/2}\frac{f(x)-1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \lim_{u\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-1}{u^2} = \lim_{u\to0}\frac{g(u)-1}{u^2} = -\frac{1}{2}$

$(*) = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(2\pi)^2} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4\pi^2} = -\frac{1}{32\pi^2}$.

Θέμα Δ. **Δ1** Είναι $f^2(x) = x-2\sqrt{x\cdot(x-1)}+x-1 \Leftrightarrow$

$f^2(x) = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}^2 \Leftrightarrow f^2(x) = \left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)^2$. (1)

Λύνω την εξίσωση. $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x=x-1 \Leftrightarrow 0=-1$ άτοπο.

Άρα f συνεχής στο $[1,+\infty)$ και δεν μηδενίζεται· από σχόλιο

Bolzano $\Rightarrow$ f διατηρεί πρόσημο στο $[1,+\infty)$

Αφού $f(1)=1>0 \Rightarrow f(x)>0$ στο $[1,+\infty)$.

Από $(1) \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1} \quad \forall x\in[1,+\infty)$.

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{x-x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}.$$

Άρα $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}, \ x\in[1,+\infty)$.

<u>Μονοτονία</u>: Έστω $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$ (2)

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1-1<x_2-1 \Rightarrow \sqrt{x_1-1}<\sqrt{x_2-1}$ (3)

$(2),(3) \Rightarrow \sqrt{x_1}+\sqrt{x_1-1} < \sqrt{x_2}+\sqrt{x_2-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_1-1}} > \dfrac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_2-1}}$

$\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f \downarrow$ στο $[1,+\infty)$.

Άρα $f\downarrow$ και συνεχής στο $A=[1,+\infty) \Rightarrow f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)=0$. $\quad f(1)=1 \Rightarrow f(A)=(0,1]$

$\boxed{\Delta 2}$ Για το π.ο. της ανίσωσης πρέπει:

$\eta\mu x+2,\ x+2 \in A=[1,+\infty) \Rightarrow$

$\eta\mu x+2 \geq 1$ και $x+2\geq 1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x \geq -1$ $\qquad x\geq -1$

που ισχύει

Άρα το π.ο. της ανίσωσης είναι το $B=[-1,+\infty)$

Τώρα $f(\eta\mu x+2) < f(x+2) \overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow} \eta\mu x+2 > x+2 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x > x \Leftrightarrow x<0$. Συναληθεύει με το B και $x\in[-1,0)$

$\boxed{\Delta 3}$ Η f είναι $\downarrow \underset{m=}{\Rightarrow} f(2)>f(e)>f(3)=M$

Έχω $m=f(2)<M$, $m<f(e)<M$, $m<f(3)<M$ $\Big\}$ Αφού $f(A)=(0,1]$ θετ. $f(x)\ \forall x\in A$

$\Rightarrow m^3 < f(2)\cdot f(e)\cdot f(3) < M^3 \Leftrightarrow$

$m < \underbrace{\sqrt[3]{f(2)\cdot f(e)\cdot f(3)}}_{\Gamma} < M$

Από Θ.Ε.Τ. $\Rightarrow \exists x_0\in(2,3)$: $f(x_0)=\Gamma$. Αφού $f\downarrow \Rightarrow$ μοναδικό x_0

$\boxed{\Delta 4}$ Για το π.ο. της εξίσωσης, πρέπει

$x \in D_f = [1, +\infty)$ και $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Άρα το π.ο. της εξίσωσης είναι το $[1, +\infty)$.

Έχω $f(x) = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow f^2(x) = 2x-1$ (3)

Αφού $f(A) = (0, 1]$ και $\sqrt{2x-1} \geq 0$, μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο και διατηρείται η ισοδυναμία.

Από την υπόθεση έχω $f^2(x) = 2x-1-2\sqrt{x^2-x}$,

και από την (3) $\Leftrightarrow 2x-1-2\sqrt{x^2-x} = 2x-1 \Leftrightarrow$

$-2\sqrt{x^2-x} = 0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

Η "λύση" $x=0$ απορρίπτεται διότι δεν ανήκει στο π.ο. της εξίσωσης. Άρα μοναδική λύση $x=1$.