Απαντήσεις διαγωνίσματος Μαθηματικών

29-11-23

Θέμα Α. (Α3) Σ - Σ - Λ - Λ - Λ

Θέμα Β (Β1) $x \cdot f(x) = 4x^3 - x - \eta\mu x \xrightarrow{x \neq 0} f(x) = 4x^2 - 1 - \frac{\eta\mu x}{x}$

Αφού f συνεχής στο $x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(4x^2 - 1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) =$

$= -1 - 1 = -2$. Άρα $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases}$

(Β2) Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$

και $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right) = 0$. Από κριτήριο παρεμβολής

είναι $\lim_{x\to -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$. και $\lim_{x\to -\infty}(4x^2 - 1) = +\infty$.

Άρα $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

(Β3). Αφού $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists\, a$ κοντά στο $-\infty$ ώστε

$f(a) < 0$ | Αφού f συνεχής στο $[a, -2] \Rightarrow$

$f(0) = -2 < 0$ | από Θ. Bolzano $\exists x_0 \in (a, -2) \subseteq (-\infty, -2)$

ώστε $f(x_0) = 0$. ο.ε.δ.

(Β4) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{f(x)} - 2x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x) - 4x^2}{\sqrt{f(x)} + 2x} =$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 1 - \frac{\eta\mu x}{x} - \cancel{4x^2}}{2x \cdot \sqrt{1 - 1/4x^2 - \frac{\eta\mu x}{4x^3}} + 2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-1 - \frac{\eta\mu x}{x}}{2x \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2} - \frac{\eta\mu x}{4x^3}} + 1\right)}_{A(x)}} = L$

Είναι $\lim_{x\to +\infty} A(x) = 2$, διότι $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0$

και $\lim_{x\to +\infty} \frac{\eta\mu x}{4x^3} = 0$ [όμοια με το Β2]

Άρα για τον παρονομαστή έχω $\lim_{x\to +\infty}\left[2x \cdot A(x)\right] = +\infty$.

και για τον αριθμητή: $\lim_{x\to +\infty}\left(-1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = -1$

Άρα $\boxed{L = 0}$

Θέμα Γ   (Γ1) Από (1) $\Rightarrow$ $\boxed{e^{f(x)}+f(x)=x+1 \quad (2)}$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}$

$$f(x_1)=f(x_2) \quad +$$

$$e^{f(x_1)}+f(x_1)=e^{f(x_2)}+f(x_2) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$x_1+1=x_2+1 \Leftrightarrow x_1=x_2 \Rightarrow f \text{ 1-1}$$

Θα ορίσω την αντίστροφη. Αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R} \Rightarrow$ το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Για τον τύπο της $f(x)$, θέτω στην (2) $f(x)=y$ και λύνω ως προς x: $e^y+y=x+1 \Rightarrow x=e^y+y-1$

Άρα $f^{-1}(y)=e^y+y-1 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=e^x+x-1, \ x\in\mathbb{R}}$

(Γ2) Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty$.

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=-\infty$.

(Γ3) Η f^{-1} είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ διότι:

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow$

$e^{x_1}+x_1-1 < e^{x_2}+x_2-1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Επίσης $f^{-1}(0)=e^0+0-1=0$ Άρα για $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$

και για $x<0 \Rightarrow f(x)<f(0)=0$.

(Γ4) Θα βρω το π.ο. της εξίσωσης.

Αφού $D_f=\mathbb{R}$, πρέπει τα ορίσματα $2x+1,\ 3x-2\in\mathbb{R}$

Έτσι το π.ο. της εξίσωσης είναι το $\mathbb{R}$.

$$e^{f(2x+1)}-e^{f(3x-2)}=3-x \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$-f(2x+1)+2x+1+1-\left(-f(3x-2)+3x-2+1\right)=3-x \Leftrightarrow$$

$$-f(2x+1)+2x+2+f(3x-2)-3x+2-1=3-x \Leftrightarrow$$

$$-f(2x+1)+f(3x-2)=0 \Leftrightarrow f(3x-2)=f(2x+1) \Leftrightarrow 3x-2=2x+1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=3$ δεκτή

Θέμα Δ (Δ1) Για $x \geq 1$ είναι $g(x) = x \cdot \left(\frac{1}{x} + a\right) = ax + 1$

Η τεταγμένες των σημείων Α και Β είναι αντίστοιχα $g(2) = 2a+1$ και $g(4) = 4a+1$ οι οποίες (από το σχήμα) είναι θετικές, άρα ταυτίζονται με τα μήκη των βάσεων του τραπεζίου $(ΑΔ) = 2a+1$, $(ΒΓ) = 4a+1$.

Είναι $(ΑΒΓΔ) = 5 \Leftrightarrow \frac{(B+b) \cdot υ}{2} = 5 \Leftrightarrow \frac{(4a+1+2a+1) \cdot 2}{2} = 5$

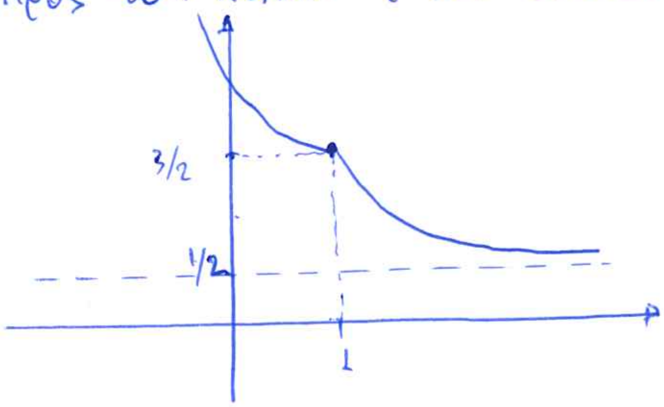
$\Leftrightarrow 6a + 2 = 5 \Leftrightarrow 6a = 3 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

(Δ2) Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$ σαν πολυωνυμική.
και συνεχής στο $(1, +\infty)$ σαν ρητή με παρονομαστή $x \neq 0$.
εξετάζω τη συνέχεια στο $x_0 = 1$.
Είναι $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 1 - 3 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)$
$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ και $g(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Άρα συνεχής και στο $x_0 = 1$.

Για την συνάρτηση $A(x) = x^2 - 3x + \frac{7}{2}$ με $x \in \mathbb{R}$ γνωρίζω ότι είναι $\downarrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$. Άρα η $f(x)$ είναι $\downarrow$ στο $(-\infty, 1)$.

Έστω $x_1, x_2 \geq 1$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{2} > \frac{1}{x_2} + \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, άρα $f \downarrow$ στο $[1, +\infty)$

Για $x \geq 1$ η $f(x)$ είναι η "μετατόπιση" της $\frac{1}{x}$ κατά $\frac{1}{2}$ προς τον πάνω. Έτσι είναι:



(Δ3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(e^x) \xlongequal{e^x=u} \lim\limits_{u\to 0} f(u) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-3x+\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))\right] \xlongequal{f(x)=u} \lim\limits_{u\to\frac{1}{2}} f(u) = \lim\limits_{u\to\frac{1}{2}}\left(u^2-3u+\frac{7}{2}\right) =$

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{2} = \frac{9}{2}.$

(Δ4) Για να ορίσω την $h^{-1}(x)$, λύνω την εξίσωση

$h(x) = y$ ως προς $x \in [1,+\infty) \Leftrightarrow -\frac{3}{x} = y \Leftrightarrow \boxed{-3 = x\cdot y \quad (1)}$

Αν $y=0$ τότε $(1) \Leftrightarrow -3 = 0\cdot x$ αδύνατη.

Αν $y\neq 0$ τότε $(1) \Leftrightarrow x = \frac{-3}{y}$ και πρέπει $x\in[1,+\infty)$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{y} \geq 1$. Πρέπει $-\frac{3}{y} > 0 \Rightarrow \boxed{y<0 \quad (2)}$

άρα $-\frac{3}{y} \geq 1 \Leftrightarrow -3 \leq y \Leftrightarrow \boxed{y \geq -3 \quad (3)}$

Από $(2),(3) \Rightarrow y\in[-3,0)$ και η λύση $x = -\frac{3}{y}$

μας δείχνει ότι ο τύπος της $f^{-1}(y) = -\frac{3}{y}$, $y\in[-3,0)$

Άρα $\boxed{f^{-1}(x) = -\frac{3}{x}, \ x\in[-3,0)}$

Για το π.ο. της εξίσωσης $f(x) = h^{-1}(x) + \frac{9}{2}$ (4)

πρέπει $x\in D_f$ και $x \in D_{h^{-1}} \Leftrightarrow x\in[-3,0)$

Στο $[-3,0)$ ο τύπος της f είναι $f(x) = x^2-3x+\frac{7}{2}$

Έτσι $(4) \Leftrightarrow x^2-3x+\frac{7}{2} = -\frac{3}{x}+\frac{9}{2} \Leftrightarrow$

$2x^3-6x^2+7x = -6+9x \Leftrightarrow 2x^3-6x^2-2x+6=0$

2	−6	−2	6	1
↓	2	−4	−6	
2	−4	−6	$\boxed{0}$	

$(x-1)\cdot(2x^2-4x-6)=0 \Leftrightarrow$

$x=1$ ή $2x^2-4x-6=0 \Leftrightarrow$

$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Από αυτές, δεκτή είναι μόνο η $x=-1$ που ανήκει στο π.ο. της εξίσωσης