4^{o} ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
Ημερομηνία: 24 – 04 – 2023

Τάξη: Γ
Τμήμα Γ21

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Εξεταζόμενη ύλη : Όλη η ύλη χρόνος : 3 ώρες

Επώνυμο: **Όνομα:**

Α1	**Α2**	**Α3**	**Α4**	**Α**
Β1	**Β2**	**Β3**	**Β4**	**Β**
Γ1	**Γ2**	**Γ3**	**Γ4**	**Γ**
Δ1	**Δ2**	**Δ3**	**Δ4**	**Δ**
Σ Υ Ν Ο Λ Ο				

ΘΕΜΑ Α

Α1 Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ένα σημείο του χ_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν f΄(x)>0 στο $(a,x_o)\cup(x_o,\beta)$, τότε το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). **(Μονάδες 7)**

Α2 Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία. **(Μονάδες 4)**

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ, τότε f΄΄(x)>0 για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.». Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό σαν σωστό (Σ) ή λάθος (Λ), **(1 μονάδα)** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας **(3 μονάδες)**.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α,β], τότε παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο [α,β] **(Μονάδες 2)**

β. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο. **(Μονάδες 2)**

γ. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα [α,β], είναι ολικό μέγιστο. **(Μονάδες 2)**

δ. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (α,β) και $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to\beta^-} f(x)$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, με f΄(ξ)=0. **(Μονάδες 2)**

ε. Αν $\lim_{x\to a}|f(x)|=\lim_{x\to a}|g(x)|=l\in\Re$ τότε $\lim_{x\to a}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$. **(Μονάδες 2)**

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις με τύπο $f(x)=-x^2+8x$, $x\in(-\infty,4]$ και $g(x)=x^2$, $x\in\Re$.

Β1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}. **(Μονάδες 3)**

Β2. Αν $f^{-1}(x)=4-\sqrt{16-x}$, $x\in(-\infty,16]$, να ορίσετε την $\phi(x)=(f^{-1}\circ g)(x)$. **(Μονάδες 7)**

Αν $\phi(x)=4-\sqrt{16-x^2}$, $x\in[-4,4]$ να λύσετε τα επόμενα ερωτήματα.

Β3. Να μελετήσετε την φ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(Μονάδες 8)**

Β4. Να δείξετε ότι το σημείο $A\left(\sqrt{8},\ln 2\right)$ δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της φ. Αν ένα σημείο Κ κινείται στην γραφική παράσταση της φ, να δείξετε ότι υπάρχουν $m,M\in\Re$ ώστε $m\le(AK)\le M$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ με $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax+\beta, & x\le 3 \\ x^2-10x+22, & x>3 \end{cases}$, για την οποία εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο [2,8].

Γ1. Να δείξετε ότι α=2 και β=4 και στη συνέχεια να βρείτε το ξ ή τα ξ του θεωρήματος. **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(Μονάδες 6)**

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι χ΄(t)=0,5 μον/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ, όταν αυτό διέρχεται από το Α(4,f(4)). **(Μονάδες6)**

Γ4. Να βρείτε τα ακρότατα της $g(x)=f\left(e^x\right)$, $x\in\Re$ και στη συνέχεια τη μέγιστη τιμή του $m\in\Re$ ώστε $f\left(e^x\right)\ge m$ για κάθε $x\in\Re$ **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει η σχέση $e^{2f(x)}+2x.e^{f(x)}=1$, για κάθε $x\in\Re$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, για κάθε $x\in\Re$. **(Μονάδες 6)**

Δ2 Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **(Μονάδες 6)**

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο σημείο (0,f(0)) και την ευθεία χ=1 . **(Μονάδες 6)**

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1-x.\sqrt{x^2+1}}dx$ **(Μονάδες 7)**

«Ἓν οἶδα ὅτι οὐδὲν οἶδα»