4ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
Σχολικό έτος 2021-22
Η ύλη που εξετάζεται όλη των πανελλαδικών εξετάσεων:

Επώνυμο:
Όνομα:

Τ Α Ξ Η Γ΄
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ομάδων Προσανατολισμού: Θετικών Σπουδών -
Διδάσκων: Σ. Βλάχος

Τμήμα Γ21

Θ 1	
Θ 2	
Θ 3	
Θ 4	
Συν	

ΘΕΜΑ 1^0.

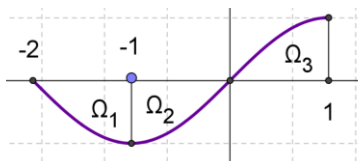
Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i) Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το σύνολο $f(A) = \{ y\in \mathbb{R} \,/\, f(x) = y$, για κάθε $x\in\mathbb{R} \}$

ii) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha)$, $g(\alpha)$ ομόσημοι, τότε $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

iii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε θα είναι $f(x) = 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

iv) Στο σχήμα 1, φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και για τα χωρία Ω_1, Ω_2, Ω_3 ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)= E(\Omega_3)=2$. Τότε $\int_{-2}^{1} f(x)dx = 6$.



σχήμα 1

v) Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$. είναι παραγωγίσιμη και 1-1 στο $[\alpha,\beta]$,τότε $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. **(μονάδες $2\times5=10$)**

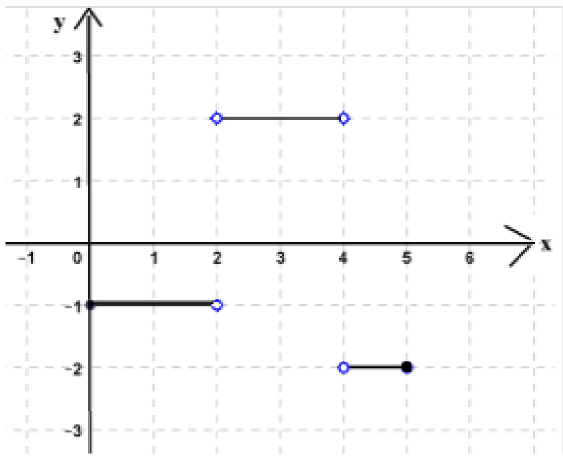
Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο (ii) **(μονάδες 5)**

Γ. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν η συνάρτηση G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να δείξετε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$. **(μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 2^0.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ με f(0)=0, της οποίας η γραφική παράσταση της παραγώγου δίνεται στο σχήμα 2.

Α) Να βρείτε τον τύπο της f και να εξετάσετε αν τα σημεία $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f . **(μονάδες 8)**



Σχήμα 2

Αν $f(x)=\begin{cases} -x, & 0\le x\le 2 \\ 2x-6, & 2<x\le 4 \\ -2x+10, & 4<x\le 5 \end{cases}$

Να απαντήσετε τα επόμενα ερωτήματα:

Β) Αν g(x) = $|\eta\mu x|$, x∈ ℝ, να ορίσετε την (fog)(x) και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(fog)(x)}{x}$ **(μονάδες 7)**

Γ) Να παραστήσετε γραφικά την f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(μονάδες 5)**

Δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 e^x f(x)dx$. **(μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 3^0.

Έστω η συνάρτηση $f:[-5,5]\to\Re$, συνεχής στο πεδίο ορισμού της και 2 φορές παραγωγίσιμη στο (-5,5), με f(0)=5, f ΄(0)=0 και $f(x).f''(x)+\left(f'(\chi)\right)^2=-1$, για κάθε χ στο (-5,5).

Α) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ για κάθε $x\in[-5,5]$. **(Μονάδες 7)**

Β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα. **(Μονάδες 5)**

Γ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο της απέχει σταθερή απόσταση από την αρχή των αξόνων και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. **(Μονάδες 5)**

Δ) Κινητό σημείο Μ, ξεκινάει από το Α(5,0) και κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f, ώστε η γωνία $\phi=A\hat{O}M$, να αυξάνεται με ρυθμό φ΄(t)=0,1 rad/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους της χορδής ΑΜ, τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία $\phi(t_o)=\dfrac{\pi}{3}rad$. **(Μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ 4^0.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\Re$. Θεωρούμε επιπλέον την παράγουσα F της f στο IR με F(1)=0.

A) Να δείξετε ότι $F\left(\dfrac{1}{x}\right)=-F(x)$, για κάθε x>0 και στη συνέχεια ότι το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $H(x)=F\left(\dfrac{1}{x}\right)$, χ>0, τον άξονα χ΄χ και την ευθεία χ=2 είναι $E_1=-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}+2F(2)$. **(Μονάδες 6)**

B) Να δείξετε ότι $f(x)\geq e^{-x^2}\geq 1-x^2$, για κάθε $x\in\Re$ και στη συνέχεια, ότι για το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=0 και χ=1, ισχύει 3Ε>2. **(Μονάδες 6)**

Γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(F(2x)-F(x)\right)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]$. **(Μονάδες 6)**

Δ) Να δείξετε ότι $1<4\int_0^1 t\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dt<2$ **(Μονάδες 7)**

Να έχετε επιτυχία!!