

# Διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Διδάσκων: Σ. Βλάχος

Τμήμα Γ21

Ομάδα Α'

Όνοματεπώνυμο..... 21/3/2023

**Θέμα Α** Δίνεται συνάρτηση  $f$  2 φορές παραγωγίσιμη στο  $[0, 2\pi]$  με  $f(x) + f''(x) = 0$  για κάθε  $x \in [0, 2\pi]$  με  $f(0) = 0$  και  $f'(0) = 1$ .

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $G(x) = (f(x) - \eta\mu x)^2 + (f'(x) - \sigma\upsilon\nu x)^2$  είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της  $f$ . (Μονάδες 15)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) + f'(x)$ , ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 20)

**Θέμα Β** Έστω η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $(-1, +\infty)$ , με  $f(x) = e^{x+e^x}$ .

α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη 0. (Μονάδες 15)

γ) Να δείξετε ότι  $e^{e^x+x-1} \geq 2x+1$  για κάθε  $x \in (-1, +\infty)$ .

(Μονάδες 15)

δ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x^2+2) - f(x^2) > f(x+2) - f(x)$ .

(Μονάδες 20)

## Διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Διδάσκων: Σ. Βλάχος

Τμήμα Γ21

Ομάδα Β'

Όνοματεπώνυμο..... 21/3/2023

**Θέμα Α** Δίνεται συνάρτηση  $f$  2 φορές παραγωγίσιμη στο  $[0, 2\pi]$  με  $f(x) - f''(x) = 0$  για κάθε  $x \in [0, 2\pi]$  με  $f(0) = 1$  και  $f'(0) = -1$ .

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $G(x) = (f(x) + f'(x)) \cdot e^{-x}$  είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της  $f$ . (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι  $f(x) = e^{-x}$  και να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$ , ως προς τα ακρότατα.

(Μονάδες 20)

**Θέμα Β** Έστω η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[1, +\infty)$ , με  $f(x) = \ln(x + \ln x)$ .

α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη 1. (Μονάδες 15)

γ) Να δείξετε ότι  $x + \ln x < e^{2x-2}$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

(Μονάδες 15)

δ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x^2 + 4) - f(x^2 + 2) \leq f(x + 4) - f(x + 2)$ .

(Μονάδες 20)