4ο ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
Ημερομηνία: 13 –3 – 2024

Τάξη: Γ
Τμήματα Γ21, Γ22

A1	A2	A3	A4	A
B1	B2	B3	B4	B
Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Γ
Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ
Σ Υ Ν Ο Λ Ο				

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Εξεταζόμενη ύλη: Μέχρι το κεφάλαιο της παραγώγου χρόνος : 3 διδακτικές ώρες

Επώνυμο: **Όνομα:**

ΘΕΜΑ Α

Α1 Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο χ_o του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και συνεχής σε αυτό. **(Μονάδες 10)**

Α2 Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat. **(Μονάδες 5)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Α) Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_o.

Β) Ισχύει $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{|x|}$, για κάθε $x\in\Re^*$.

Γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και f ΄(x)=0 για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε f(x)=0 για κάθε $x\in[a,\beta]$.

Δ) Η συνάρτηση $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{x}$, έχει πλάγια ασύμπτωτη στο +∞, την ευθεία ε: ψ=-χ+1.

Ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, που είναι το [α,β] και $f'(a)\neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο α. **(Μονάδες 2x5=10)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^3+ax^2+\beta}{x^2-1}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-\dfrac{1}{2}$ και η $g(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Β1 Να δείξετε ότι α=1, β=0 και να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\Re$ στο οποίο να ισχύει f=g. **(Μονάδες 6)**

Β2 Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(Μονάδες 6)**

Β3 Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες. **(Μονάδες 9)**

Β4 Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f **(Μονάδες 4)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $f(x)\cdot f'(x)=x+1$ για κάθε $x\in\Re$, $f(0)=\sqrt{2}$.

Γ1 Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ για κάθε $x\in\Re$. **(Μονάδες 7)**

Γ2 Ένα σημείο Μ(χ,ψ) κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι σταθερός και ισούται με 0,5 μον/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του, όταν διέρχεται από το σημείο με τετμημένη χ_o=0 **(Μονάδες 5)**

Γ3 Να εξετάσετε αν υπάρχουν εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο N(0,-1). **(Μονάδες 7)**

Γ4 Να βρείτε τα α, β $\in \Re$ ώστε $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax+\beta\right)=0$ **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\Re$ με $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)-x$ και η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\Re$, με $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Δ1. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(Μονάδες 4)**

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0, έχει μοναδική ρίζα. **(Μονάδες 7)**

Δ3. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη $x_o\in(0,e)$, για την οποία ισχύει $f\left(\dfrac{x_o}{2}\right)<\dfrac{f(x_o)}{2}$. **(Μονάδες 7)**

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x)<2^{|f(x)|}$. **(Μονάδες 7)**

Να έχετε επιτυχία!!

Λύσεις διαγωνίσματος 13-3-24

$\boxed{A3}$ Λ - Λ - Λ - Σ - Λ

<u>Θέμα Β</u> $\boxed{B1}$ Αφού $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\frac{1}{2}$ και για τον παρονομαστή είναι $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-1)=0$, από γνωστό λήμμα $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}(x^3+ax^2+b)=0$

$\Leftrightarrow -1+a+b=0 \Rightarrow b=1-a$. Άρα $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+ax^2+b}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+ax^2+1-a}{x^2-1}$

$\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2ax}{2x} = \frac{3+2a(-1)}{-2}$ Άρα πρέπει $\frac{3-2a}{-2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3-2a=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1-a=1-1=0$. Άρα $f(x)=\frac{x^3+x^2}{x^2-1}$. $D_f = \mathbb{R}-\{\pm1\}$

Αν θεωρήσω $D_g = \mathbb{R}-\{\pm1\}$ έχω $f(x)=\frac{x^2\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2}{x-1} = g(x)$

$\boxed{B2}$ Για $x\neq\pm1$ είναι $f'(x)=g'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-2x>0 \Leftrightarrow x<0$ ή $x>2$. Άρα

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$f'(x)$	+	+	0 −	−	0 +
$f(x)$	↗	↗	↘	↘	↗

Τ.Μ 0 (στο $x=0$), Τ.Ε 4 (στο $x=2$)

$\boxed{B3}$ $f''(x)=g''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$f''(x)$	−	−	+
$f(x)$	∩	∩	∪

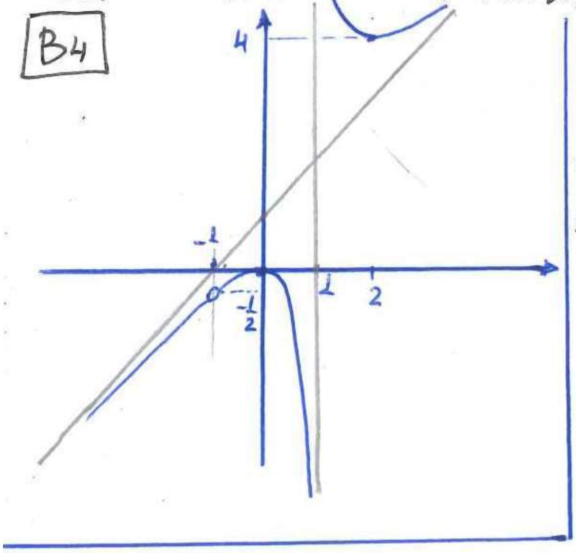
Δεν έχει σ.κ.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\frac{1}{2}$ (από υπόθεση). $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \Rightarrow$ κατακόρυφη ασύμπτωτη $x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$

Άρα πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ η ευθεία $\varepsilon: y=x+1$· ομοίως η ίδια ευθεία είναι ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

$\boxed{B4}$



<u>Θέμα Γ</u> $\boxed{\Gamma_1}$ $2f(x)\cdot f'(x)=2x+2 \Leftrightarrow (f^2(x))'=(x^2+2x)'$

$\Rightarrow f^2(x)=x^2+2x+c,\ x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f^2(0)=c \Leftrightarrow \sqrt{2}^2=c \Leftrightarrow c=2$

Άρα $f^2(x)=x^2+2x+2$ (1)

Αν $\exists x_0\in\mathbb{R}$ με $f(x_0)=0 \Rightarrow f^2(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0^2+2x_0+2=0$

Άτοπο. Άρα $f(x)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ και f συνεχής

Από σχόλιο Bolzano διατηρεί πρόσημο

και αφού $f(0)=\sqrt{2}>0 \Rightarrow f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Από (1) $\Rightarrow |f(x)|=\sqrt{x^2+2x+2} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\Gamma_2}$ Για το σημείο $M(x(t),y(t))$ είναι $y(t)=\sqrt{x^2(t)+2x(t)+2}$.

Άρα $y'(t)=\frac{2x(t)\cdot x'(t)+2x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+2x(t)+2}} \xrightarrow{t=t_0} y'(t_0)=\frac{x'(t_0)}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{x'(t_0)}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$x'(t_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ μον/sec.

Γ3 Αν $A(x_1, f(x_1))$ το σημείο επαφής, τότε η εξίσ. εφαπτομένης

είναι $\varepsilon:\ y-\sqrt{x_1^2+2x_1+2} = \dfrac{x_1+1}{\sqrt{x_1^2+2x_1+2}}\cdot(x-x_1)$

Αφού $N(0,-1)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow -1-\sqrt{x_1^2+2x_1+2} = -\dfrac{(x_1+1)\cdot x_1}{\sqrt{x_1^2+2x_1+2}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{x_1^2+2x_1+2} + x_1^2+2x_1+2 = x_1^2+x_1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+2x_1+2} = -x_1-2$ (2)

Αν $-x_1-2<0$ τότε η εξίσωση (2) είναι αδύνατη.

Αν $-x_1-2\geq 0 \Leftrightarrow x_1\leq -2$, (2) $\Leftrightarrow x_1^2+2x_1+2=(-x_1-2)^2 \Leftrightarrow \dots x_1=-1$

λύση που απορρίπτεται. Άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη ...

Γ4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\alpha x-\beta)\right]=0 \Leftrightarrow$ η ευθεία $y=\alpha x-\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Άρα $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

και $-\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+2x+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+2/x+2/x^2}+1}=\dfrac{2}{2}=1$. Άρα $\boxed{\alpha=1}$ και $-\beta=1 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-1}$

Θέμα Δ **Δ1** $g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

	0	e	$+\infty$
g'	+		−
g	↗	ο.μ. $1/e$	↘

Δ2 Παρατηρώ $f(0)=0$

$f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}-1=\dfrac{x-1}{e^x-x}$. Επειδή $e^x\geq x+1>x \Rightarrow e^x-x>0$

Άρα

	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘		↗

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x-x)-\ln e^x\right]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\dfrac{e^x-x}{e^x}\right]=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x)=+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{e^x}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

Για το $A=\underbrace{[0,1]}_{A_1}\cup\underbrace{(1,+\infty)}_{A_2}$. Αφού f συνεχής είναι $f(A_1)=[f(1),f(0)]=$
$=[\ln(e-1)-1,\ 0]$

$f(1)=\ln(e-1)-1$ και $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(\ln(e-1)-1,\ 0)$

Επειδή $0\in f(A_1)$ και $f\downarrow$ στο $A_1 \Rightarrow 0$ μοναδ. ρίζα στο A_1

Επειδή $0\notin f(A_2) \Rightarrow$ η εξίσωση αδύνατη στο A_2.

Δ3 Είναι $f''(x)=\dfrac{(2-x)\cdot e^x-1}{(e^x-x)^2}$. Θέτω $B(x)=(2-x)\cdot e^x-1$ συνεχής στο $[1,2]$

$B(1)=2e-1>0$, $B(2)=-1<0$

Από Θ. Bolzano $\Rightarrow \exists x_0\in(1,2): B(x_0)=0$. Επιπλέον $B'(x)=(1-x)\cdot e^x$

	0	1	$+\infty$
$B'(x)$	+	0	−
$B(x)$	↗		↘
	1	$\frac{2e-1}{(e-1)^2}$	

Αφού $B(0)=1$ και $B(x)\uparrow$ στο $[0,1] \Rightarrow B(x)>1>0$ στο $[0,1]$

Άρα x_0 μοναδικό στο $[0,+\infty)$

	0	x_0	$+\infty$
$B(x)$	+	0	−
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	∪		∩

Άρα x_0 μοναδική θέση σ.κ. της f.

Αφού $x_0\in(1,2)\subseteq(0,e) \Rightarrow x_0\in(0,e)$

Από ΘΜΤ $\Rightarrow \exists \xi_1\in\left(0,\frac{x_0}{2}\right): \dfrac{f\left(\frac{x_0}{2}\right)-f(0)}{\frac{x_0}{2}}=f'(\xi_1)$ (1)

Από ΘΜΤ $\Rightarrow \exists\, \xi_2 \in \left(\frac{x_0}{2}, x_0\right): \dfrac{f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)}{x_0-\frac{x_0}{2}} = f'(\xi_2)$ (2)

Αφού $f''(x)>0$ στο $(0,x_0) \Rightarrow f' \uparrow$

Αφού $0<\xi_1<\frac{x_0}{2}<\xi_2<x_0 \Rightarrow \xi_1<\xi_2$ $\Big\} \Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$

Από (1),(2) $\Rightarrow \dfrac{f\left(\frac{x_0}{2}\right)}{\frac{x_0}{2}} < \dfrac{f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)}{\frac{x_0}{2}} \Leftrightarrow 2f\left(\frac{x_0}{2}\right) < f(x_0)$ ο.ε.δ.

$\boxed{\Delta4}$ Το π.ο. της ανίσωσης είναι το $[0,+\infty)$.

Έχω: $\ln f^2(x) < \ln 2^{|f(x)|} \Leftrightarrow 2\ln|f(x)| < |f(x)|\ln 2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{\ln|f(x)|}{|f(x)|} < \dfrac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \boxed{g(|f(x)|) < g(2) \quad (3)}$

Από το $\boxed{\Delta2}$ έχω βρει το σύνολο τιμών της f και $f(A)=[\ln(e-1)-1, 0]$.

Θα δείξω ότι $|f(x)|<e$ · γι' αυτό αρκεί να δείξω ότι και το μέγιστο της $|f(x)|$ ισχύει $|\ln(e-1)-1|<e \Leftrightarrow 1-\ln(e-1)<e$

$\Leftrightarrow \ln e-\ln(e-1)<e \Leftrightarrow \ln\frac{e}{e-1}<e \Leftrightarrow \frac{e}{e-1}<e^e \Leftrightarrow \frac{1}{e-1}<e^{e-1} \Leftrightarrow$

$1<e^{e-1}\cdot(e-1)$ το οποίο ισχύει διότι $e^{e-1}>1$ και $e-1>1$

Άρα τα ορίσματα της g στη σχέση (2) είναι στο διάστημα $(0,e)$

στο οποίο η g είναι γν. αύξουσα.

Από (3) $\Leftrightarrow |f(x)|<2 \Leftrightarrow -f(x)<2 \Leftrightarrow \boxed{f(x)>-2 \quad (4)}$

όμως (από το σύνολο τιμών της f) έχω $f(x)>\ln(e-1)-1$

και $\ln(e-1)-1>-2 \Leftrightarrow \ln(e-1)>-1$ διότι $e-1>1 \Rightarrow \ln(e-1)>\ln 1=0$

Άρα η (4) ισχύει $\forall x\in D_f=[0,+\infty)$.

Τελικά οι λύσεις της αρχικής είναι $x\in[0,+\infty)$