Άσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f\ ,g\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν τα εξής

$$f^2(x)+g^2(x)=1\ ,\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}\ ,\qquad g(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ ,\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\quad ,\quad \lim_{x\to 0}g(x)=1$$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

Α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x^2}$

Β. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x-1)}{x^2-3x+2}$

Δ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x}{g(x)-1}$

Ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{g(x)-1}$

ΣΤ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-1}{16x^4-8x^2\pi^2+\pi^4}$

Ζ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x^2-2x}$

Η. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{g(2x)}{4x-\pi}$

Λύση

Α. $\dfrac{g(x)-1}{x^2} = \dfrac{g^2(x)-1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{g(x)+1} = \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2\left(\dfrac{-1}{g(x)+1}\right) \xrightarrow{x\to 0} 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

Β. $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{1-g^2(x)} \leq 1$ *και έχουμε όριο μηδενικής επί φραγμένη*

Γ. $\dfrac{f(x-1)}{x^2-3x+2} = \dfrac{f(x-1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x-2} \xrightarrow{x\to 1} 1\cdot\dfrac{1}{-1} = -1$

Δ. $\dfrac{\eta\mu^2 x}{g(x)-1} = \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\dfrac{x^2}{g(x)-1} \xrightarrow{x\to 0} 1\cdot(-2) = -2$

Ε. $|g(x)| = \sqrt{g^2(x)} = \sqrt{1-f^2(x)} \leq 1$ *, επομένως* $g(x)-1<0$ *κοντά στο* 0

έχουμε λοιπόν όριο της μορφής $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$

ΣΤ. $\dfrac{f(x)-1}{16x^4-8x^2\pi^2+\pi^4} = \dfrac{f(x)-1}{(4x^2-\pi^2)^2} = \dfrac{f(x)-1}{(2x-\pi)^2}\cdot\dfrac{1}{(2x+\pi)^2} \xrightarrow{x\to\frac{\pi}{2}} -\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{(2\pi)^2}$

$$= -\frac{1}{32\pi^2}\ \text{, διότι έχουμε πως}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{(2x-\pi)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-1}{(2y)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{g(y)-1}{4y^2} = -\frac{1}{8}$$

Ζ. $\dfrac{f(2x)}{x^2-2x} = \dfrac{f(2x)}{2x}\cdot\dfrac{2}{x-2} \xrightarrow{x\to 0} 1\cdot(-1) = -1$

Η. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{g(2x)}{4x-\pi} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{g\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{-2y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)}{-2y} = -\dfrac{1}{2}$