Θέμα Γ Έστω $f:[1,3] \to \mathbb{R}$ 2φ παρ/μη

$f(1)=4,\ f(3)=1,\ f'(3)=-1,\ f''(x)>0\ \forall x\in(1,3)$

Γ1 Εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0=3$

Γ2 Μονοτονία και σύνολο τιμών της f

Γ3 Ν.δ.ο. η C_f τέμνει την $y=x-1$ ακριβώς 1 φορά

Γ4 i) Ν.δ.ο. $\dfrac{f(x)-4}{x-1} < \dfrac{1-f(x)}{3-x},\ \forall x\in(1,3)$

ii) Ν.δ.ο. $f(x) \le -\frac{3}{2}x+\frac{11}{2},\ \forall x\in[1,3]$

Γ5 Ν.δ.ο. $4 < \int_1^3 f(x)\,dx < 5$

Γ1 $y-f(3)=f'(3)(x-3) \iff y-1=-(x-3) \iff$

$y=-x+4$

Γ2 $x<3 \Rightarrow f'(x)<f'(3)=-1 \Rightarrow f'(x)<0$

Άρα $f(x)\downarrow$ στο $[1,3]$

$f(A)=[f(3),f(1)]=[1,4]$

Γ3 Έστω $A(x)=f(x)-x+1$

$A(1)=f(1)=4>0$

$A(3)=f(3)-3+1=1-3+1=-1<0$

Θ.Β. $\Rightarrow$ ύπαρξη.

$x_1<x_2 \xrightarrow{f\downarrow} f(x_1)>f(x_2)$, $\ -x_1>-x_2$ $\Rightarrow A(x_1)>A(x_2)$, $A(x)\downarrow$

Άρα είναι μοναδική

Γ4(i) Η σχέση που πρέπει να δείξω ισοδύναμα: $\boxed{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} < \dfrac{f(3)-f(x)}{3-x}}$ (1)

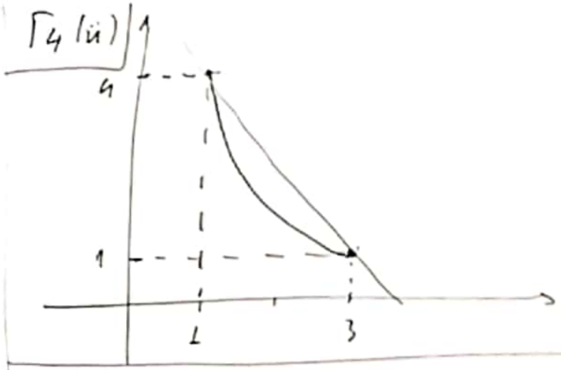
Από ΘΜΤ $\Rightarrow \exists\ \xi_1\in(1,x):\ \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(\xi_1)$

Από ΘΜΤ $\Rightarrow \exists\ \xi_2\in(x,3):\ \dfrac{f(3)-f(x)}{3-x}=f'(\xi_2)$

Αφού $\xi_1<\xi_2 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$

Άρα ισχύει η (1) ο.ε.δ.

Γ4(ii)



$A(x)=f(x)+\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}<0$

$A'(x)=f'(x)+\frac{3}{2} \to A'(x)\uparrow$

$A'(3)=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}>0$

$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{1-4}{2}=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \exists\ \xi\in(1,3):\ f'(\xi)=-\frac{3}{2}$

$A'(\xi)=0$

	1		ξ		3
A'(x)		−	0	+	
A(x)	0	↘		↗	0

$A(1)=f(1)+\frac{3}{2}-\frac{11}{2}=4-4=0,\ A(3)=f(3)+\frac{9}{2}-\frac{11}{2}=1-1=0$