$\Theta.6^o / 2018 / EME$

$$\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}-e^t\right)}_{L(x)}=\frac{f'(x)}{2(x+1)},\quad x\neq -1,\quad f(-1)=\frac{2}{e}$$

$$L(x)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\cancel{e^{2t}}+(x+1)\cdot e^{x+t}+1-\cancel{e^{2t}}}{\sqrt{e^{2t}+(x+1)\cdot e^{x+t}+1}+e^t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left\{\frac{\cancel{e^t}\left[(x+1)\cdot e^x+e^{-t}\right]}{\cancel{e^t}\left(\sqrt{1+(x+1)e^{x-t}+e^{-2t}}+1\right)}\right\}=\frac{(x+1)e^x}{\sqrt{1}+1}=\frac{(x+1)e^x}{2}$$

Από (Y) $\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{\cancel{2}(x+1)}=\dfrac{(x+1)\cdot e^x}{\cancel{2}} \Leftrightarrow f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x=(x^2+2x+1)\cdot e^x=x^2e^x+2x\cdot e^x+e^x$

$=(x^2\cdot e^x)'+(e^x)'=(x^2e^x+e^x)'=((x^2+1)\cdot e^x)'$. Άρα $f'(x)=((x^2+1)e^x)'$ $\forall x\neq -1$

$$f(x)=\begin{cases}(x^2+1)\cdot e^x+c_1, & x>-1\\ 2/e, & x=-1\\ (x^2+1)\cdot e^x+c_2, & x<-1\end{cases}$$

Αφού f παρ/μη $\Rightarrow f$ συνεχής $\Rightarrow \lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1) \Leftrightarrow$
$2e^{-1}+c_1=2e^{-1} \Leftrightarrow c_1=0$, ομοίως $c_2=0 \Rightarrow f(x)=(x^2+1)e^x$.

$\underline{2^{ος}\text{ τρόπος}}$: $f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x$. Έστω $A(x)=(x^2+1)\cdot e^x$. $A'(x)=2x\cdot e^x+(x^2+1)\cdot e^x=(x^2+2x+1)e^x=(x+1)^2\cdot e^x$

Παρατηρώ $A'(x)=f'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\ldots$

(β) $f'(x)=(x+1)^2e^x\geq 0$

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $+$
$f(x)$	$\nearrow$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)\cdot e^x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)e^x=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{e^{-x}}=$

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\uparrow$

$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=$
$=(0,+\infty)$ ο.ε.δ.

(γ) $f''(x)=2(x+1)\cdot e^x+(x+1)^2\cdot e^x=$
$=e^x(2x+2+x^2+2x+1)=$
$=(x^2+4x+3)e^x$ Σχ:

x	$-\infty$ -3	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$ 0	$-$ 0	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

(δ) $f(x)\cdot(x+1)\leq f(x^2)+2ex \Leftrightarrow$ $x>1 \Rightarrow x^2>x$

$x\cdot f(x)+f(x)\leq f(x^2)+2ex \Leftrightarrow$

$\dfrac{x\cdot f(x)-2ex}{x^2-x}\leq\dfrac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x} \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)-2e}{x-1}\leq\dfrac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}$

$\xi_1<\xi_2 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$

$\exists\,\xi_1\in(1,x)$: $\dfrac{f(x)-2e}{x-1}=f'(\xi_1)$

$\exists\,\xi_2\in(x,x^2)$: $\dfrac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}=f'(\xi_2)$