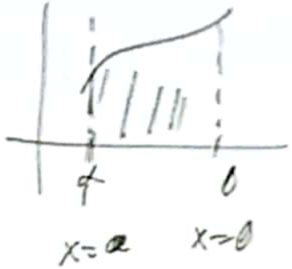
Εμβαδά - Θεωρία

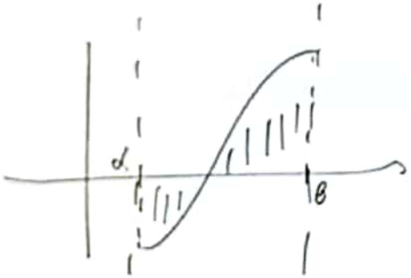
1) Αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$ $\Rightarrow$



$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

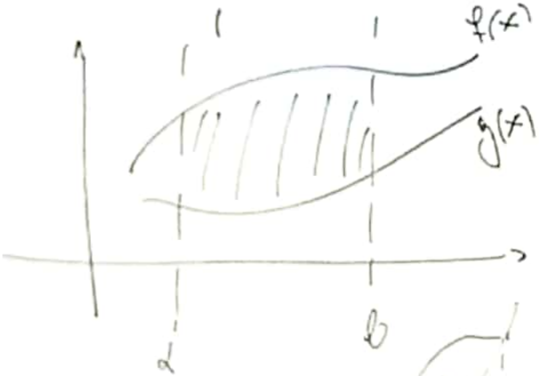
2) Αν $f(x) \leq 0$ $\quad E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$

3) Αν



$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$$

4)α



$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|dx$$

Λύνω την ανίσωση $f(x) > g(x)$

4)β

5) Δεν δίνονται τα άκρα των ολοκλήρωσης

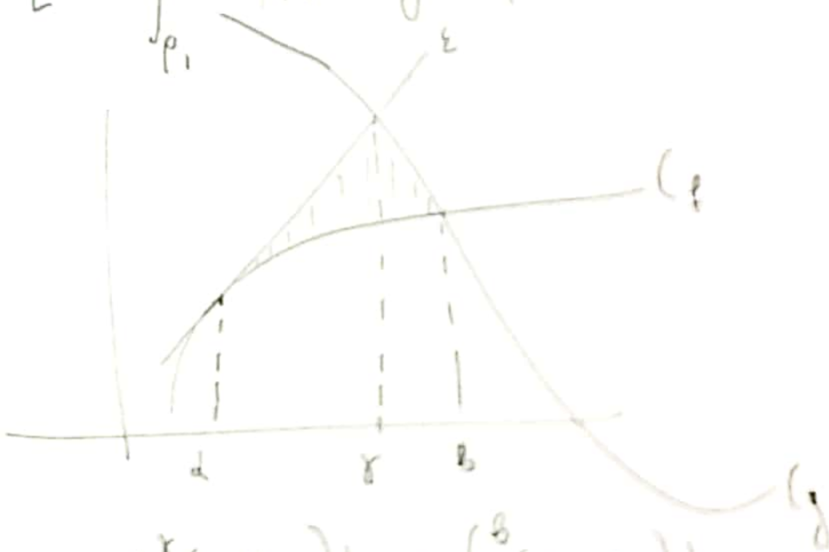
Ζητάει εμβ. χωρίου από 2 γραφικές παραστάσεις

- Λύνω την εξίσωση $f(x) = g(x)$

βρίσκω π.χ. 5 ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4 < \rho_5$

$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_5} |f(x) - g(x)| dx$$

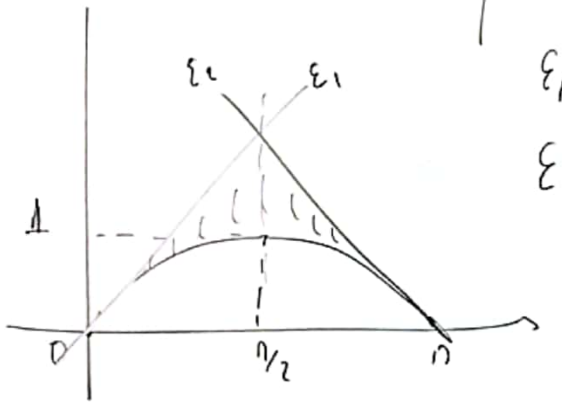
6)



$$E = \int_{\alpha}^{\gamma} (\varepsilon - f(x))dx + \int_{\gamma}^{\beta} (g(x) - f(x))dx$$

Λύνω τις εξισώσεις ανά 3 ανά 2
- $f(x) = g(x)$
- $f(x) = \varepsilon(x)$
- $g(x) = \varepsilon(x)$

Έστω $f(x)=ημx$, $x \in [0,π]$ και οι εφαπτόμενες $ε_1$, $ε_2$ της C_f στα σημεία $O(0,0)$ και $A(π, f(π))$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από της C_f, $ε_1$, $ε_2$.



Εξισώσεις εφαπτομένων. $f'(x)=συνx$ $\quad f'(π)=-1$

$ε_1: \; y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = συν0\cdot x \Leftrightarrow y=x. \;\to\; ε_1: y=x$

$ε_2: \; y-f(π)=f'(π)(x-π) \Leftrightarrow y=-1\cdot(x-π) \Leftrightarrow y=-x+π \;\to\; ε_2: y=-x+π$

$$\left.\begin{aligned} y&=x \\ y&=-x+π \end{aligned}\right\} \quad x=-x+π \Leftrightarrow x=π/2, \quad y=π/2$$

$$E=\int_0^{π/2}(x-ημx)\,dx+\int_{π/2}^{π}(-x+π-ημx)\,dx$$

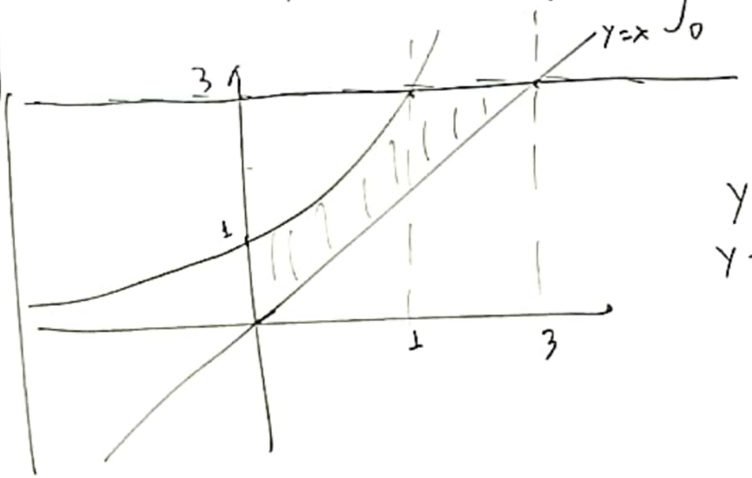
ασκ.6 / Σ.232

$ε_1: y=3$

$ε_2: y=x$

$f(x)=3^x$,

άξονας $y'y$



$3^x=3 \Leftrightarrow x=1$

$$\left.\begin{aligned} y&=x \\ y&=3 \end{aligned}\right\} \to x=3$$

$$E=\int_0^1(3-3^x)\,dx+\int_1^3(3-x)\,dx$$

Θ. 2°/18 | $f(0)=0$, f παρ/μη στο $\mathbb{R}^*$ $\quad f'(x)=\dfrac{e^x}{3f^2(x)+2f(x)+1}$ (1), $x\in\mathbb{R}^*$

α) Έστω $A(x)=3x^2+2x+1$. $\Delta=2^2-4\cdot3\cdot1=4-12=-8<0$

$$f'(x)=\frac{e^x}{A(f(x))}\qquad \left.\begin{array}{l}A(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}\\ A(f(x))>0\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)>0 \text{ στο } \mathbb{R}^*$$

$$\boxed{B(x)=x^3+x^2+x}$$

x	$-\infty$		0		
f'		$+$	?	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

(1) ⇒ $3f^2(x)\cdot f'(x)+2f(x)f'(x)+f'(x)=e^x$ ⇔ $\left(f^3(x)+f^2(x)+f(x)\right)'=(e^x)'$ ⇒

$f^3(x)+f^2(x)+f(x)=e^x+c_1,\ x<0$, $\quad f^3(x)+f^2(x)+f(x)=e^x+c_2,\ x>0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\left(f^3(x)+f^2(x)+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x+c_1)$ ⇒

αφού f συνεχής και $f(0)=0$ ⇒ $0=1+c_1$ ⇔ $\boxed{c_1=-1}$

Ομοίως $c_2=-1$

Άρα $\boxed{f^3(x)+f^2(x)+f(x)=e^x-1 \ (2)\ x\neq0}$

Παρατηρώ ότι $f^3(0)+f^2(0)+f(0)=0$, $e^0-1=0$. Άρα η (2) ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$

β) (2) ⇒ $f^2(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x}+f(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^x-1}{x}$

$$\boxed{\frac{f(x)}{x}\cdot\underbrace{\left(f^2(x)+f(x)+1\right)}_{\Gamma(x)}=\frac{e^x-1}{x}\quad(3)}$$

$\Gamma(x)$ τριώνυμο ως προς $f(x)$ με $\Delta=-3<0$

Άρα $\Gamma(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. (3) ⇒ $\boxed{\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\dfrac{1}{\Gamma(x)}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\ \underset{DLH}{\overset{\frac00}{=}}\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{1}=1.\\ \lim\limits_{x\to0}\Gamma(x)=1\end{array}\right\}\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow f'(0)=1$$

(γ) Έστω $A=(0,2)$. f συνεχής στο A.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0$. $\quad f(2)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$

(2) $\overset{x=2}{\Rightarrow}$ $f^3(2)+f^2(2)+f(2)=e^2-1$ ⇔ $B(f(2))=e^2-1$

$B'(x)=3x^2+2x+1$. $\Delta=4-4\cdot3<0$ ⇒ $B'(x)>0$

$B(x)\uparrow$. Θ.δ.ο. $f(2)>1$ ⇔ $B(f(2))>B(1)$ ⇔

$B(f(2))>3$ ⇔ $e^2-1>3$ ⇔ $e^2>4$ ⇔ $e>2$ ισχύει

$1\in(f(0),f(2))$ από ΘΕΤ ⇒ $\exists x_0\in(0,2)$: $f(x_0)=1$.

$$I=\int_0^{x_0}e^x f(x)\,dx=\int_0^{x_0}(e^x)'f(x)\,dx=\left[e^x f(x)\right]_0^{x_0}-\underbrace{\int_0^{x_0}e^x f'(x)\,dx}_{I_1}$$

$$I_1\overset{(2')}{=}\int_0^{x_0}\left(f^3(x)+f^2(x)+f(x)+1\right)f'(x)\,dx=$$

$$\left[\frac{f^4(x)}{4}\right]_0^{x_0}+\left[\frac{f^3(x)}{3}\right]_0^{x_0}+\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_0^{x_0}+\left[f(x)\right]_0^{x_0}.$$

Scanned with CamScanner

Θ.2°/18

(δ) $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\frac{1}{f(x)}-3}\, ημ t^2\, dt$

$\frac{1}{2} < t < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < t^2 < 1 \Rightarrow 0 < ημ\frac{1}{4} < ημ t^2 < ημ 1 < ημ\frac{\pi}{2} < 1$

$0 < ημ t^2 < 1 \Rightarrow 0 < t^{\frac{1}{f(x)}-3} \cdot ημ t^2 < t^{\frac{1}{f(x)}-3} \Rightarrow \boxed{0 < \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\frac{1}{f(x)}-3}\, ημ t^2\, dt < \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\frac{1}{f(x)}-3}\, dt}$ (4)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\frac{1}{f(x)}-3}\, dt = \left[\frac{t^{\frac{1}{f(x)}-2}}{\frac{1}{f(x)}-2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \underbrace{\frac{1^{\frac{1}{f(x)}-2}}{\frac{1}{f(x)}-2}}_{\Delta(x)} - \underbrace{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{f(x)}-2}}{\frac{1}{f(x)}-2}}_{E(x)}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. Θέτω $u = \frac{1}{f(x)} - 2$. $\lim\limits_{x\to 0^+} u = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \Delta(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = 0$

Από (4) + κριτήριο παρεμβ. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \int \dots = 0$

Scanned with CamScanner