Ασκ. 9 δ) $\int_0^1 f^4(x)dx + \int_0^1 f^2(x)dx = 2\int_0^1 f^3(x)\,dx.$

$Z.\ f = ;$

$$\int_0^1 \left(f^4(x) - 2f^3(x) + f^2(x)\right) dx = 0 \iff$$

$$\int_0^1 f^2(x)\cdot\left(f^2(x) - 2f(x) + 1\right) dx = 0 \iff$$

$$\int_0^1 \left[f^2(x)\cdot(f(x)-1)^2\right] dx = 0 \iff \int_0^1 \left[f(x)\cdot\left(f(x)-1\right)\right]^2 dx = 0 \quad (1)$$

Έχω $\left[f(x)\cdot\left(f(x)-1\right)\right]^2 \geq 0$. Αν $\exists\, x_1 \in [0,1] : f(x_1)\cdot\left(f(x_1)-1\right) \neq 0$ …

τότε $\left[f(x_1)\cdot\left(f(x_1)-1\right)\right]^2 > 0$, από θεώρημα $\Rightarrow \int_0^1 \left[f(x)\cdot\left(f(x)-1\right)\right]^2 dx > 0$

Άτοπο από (1).

Άρα $f(x)\cdot\left(f(x)-1\right) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Άρα οι μοναδικές τιμές που μπορεί να πάρει η f είναι 0 ή 1.

Αν $\exists\, x_1 : f(x_1) = 0$, $\exists\, x_2 : f(x_2) = 1$, Αφού f συνεχής, από Θ.Ε.Τ. $\Rightarrow$ παίρνει όλες τις τιμ… του διαστήματος $[0,1]$, άτοπο. Άρα $f(x) = 0\ \forall x \in [0,1]$ ή $f(x) = 1\ \forall x \in [0,1]$.

Ασκ. 10

α) $\lambda^2\int_a^{\beta} f^2(x)\,dx + 2\lambda\cdot\int_a^{\beta} f(x)\cdot g(x)\,dx + \int_a^{\beta} g^2(x)\,dx \geq 0 \iff$ (1) $\forall \lambda\in\mathbb{R}$

$\int_a^{\beta}\left(\lambda^2 f^2(x) + 2\lambda\cdot f(x)\cdot g(x) + g^2(x)\right)dx \geq 0 \iff \int_a^{\beta}\left(\lambda f(x)+g(x)\right)^2 dx \geq 0$ ισχύει

Αφού $\left(\lambda f(x)+g(x)\right)^2 \geq 0 \ \forall x\in[\alpha,\beta]$, από θεώρημα $\Rightarrow$

β) $\left(\int_a^{\beta}\left(f(x)\cdot g(x)\right)dx\right)^2 \leq \int_a^{\beta} f^2(x)\cdot dx\cdot\int_a^{\beta} g^2(x)\,dx$.

Αφού η (1) αληθεύει $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ και 1^o μέλος τριώνυμο ως προς λ

με συντελ. του λ^2 το $\int_a^{\beta} f^2(x)\,dx \geq 0$ τότε $\Delta \leq 0 \iff$

$\left(2\int_a^{\beta} f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2 - 4\cdot\int_a^{\beta} f^2(x)\,dx\int_a^{\beta} g^2(x)\,dx \leq 0$

<u>Θ.Θ.Θ.Λ.</u> Αν $F(x)$ μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$.

Τότε $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$.

$$\left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \Rightarrow$$

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \big(f(x)\cdot g(x)\big)'\,dx - \int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)\,dx = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)\,dx$$