$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$$

ασκ.6 $I_\nu = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sigma\varphi^\nu x\,dx$. ν.δ.ο. $I_\nu > I_{\nu-1}$

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\sigma\varphi x \uparrow} \frac{\pi}{6} > \sigma\varphi x > \sigma\varphi \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \sigma\varphi x > 1 \xrightarrow{\sigma\varphi x > 0} \sigma\varphi^\nu x > \sigma\varphi^{\nu-1} x \Leftrightarrow$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sigma\varphi^\nu x\,dx > \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sigma\varphi^{\nu-1} x\,dx$$

$I_\nu > I_{\nu-1}$ ο.ε.δ.

ασκ.7 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^3}}$. πρέπει $1+x^3 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$-1 < x_1 < x_2 \xrightarrow{x^3 \uparrow} -1 < x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow \cdots\ f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow$

$I(t) = \int_{t^3}^{t^3+5t^2} f(x)\,dx$. $\lim_{t\to+\infty} I(t) = 0$

$t^3 \leq x \leq t^3+5t^2 \xrightarrow{f\downarrow} f(t^3) \geq f(x) \geq f(t^3+5t^2) \Rightarrow$

$t^2 \geq 0 \Rightarrow t^3 < t^3+5t^2$. Θεωρώ

$$\int_{t^3}^{t^3+5t^2} f(t^3)\,dx \geq \int_{t^3}^{t^3+5t^2} f(x)\,dx \geq \int_{t^3}^{t^3+5t^2} f(t^3+5t^2)\,dx$$

$$f(t^3)\cdot 5t^2 \geq I(t) \geq f(t^3+5t^2)\cdot 5t^2$$

$\lim_{t\to+\infty}\left(f(t^3)\cdot 5t^2\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{5t^2}{\sqrt[4]{1+t^9}} =$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{5t^2}{t^{9/4}\sqrt[4]{\frac{1}{t^9}+1}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{5}{\sqrt[4]{t}\,\underbrace{\sqrt[4]{\frac{1}{t^9}+1}}_{A(t)}} = 0$

$\lim_{t\to+\infty} A(t) = 1$

Scanned with CamScanner

$$\lim_{t\to+\infty}\left[f(t^3+5t^2)\cdot 5t^2\right] = \lim_{t\to+\infty}\frac{5t^2}{\sqrt[4]{1+(t^3+5t^2)^3}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{5t^2}{\sqrt[4]{1+t^9\cdot\left(1+\frac{5}{t}\right)^3}} =$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{5t^2}{\sqrt[4]{t^9}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{t^9}+\left(1+\frac{5}{t}\right)^3}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{5}{\sqrt[4]{t}\cdot\underbrace{\sqrt[4]{\frac{1}{t^9}+\left(1+\frac{5}{t}\right)^3}}_{B(t)}} = 0$$

$\sqrt[4]{t^9} = \sqrt[4]{t^8}\cdot\sqrt[4]{t}$

$\lim_{t\to+\infty} B(t) = 1$. $\lim_{t\to+\infty}\frac{5}{\sqrt[4]{t}} = 0$ Από (1) + κ.π $\to \lim_{t\to+\infty} I(t)=0$

Άσκ. 8, $a<b$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow C_f, C_g$ τουλ. 1 κοινό σημείο.

$\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx = 0$. Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι C_f, C_g κανένα κοινό σημείο

$\Rightarrow f(x)\neq g(x)\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow f(x)-g(x)\neq 0,\ x\in[a,b]$

$f(x)-g(x)$ συνεχής στο $[a,b]$ → Από σχόλιο Bolzano διατηρεί πρόσημο.

1ον) $f(x)-g(x)>0\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx>0$ άτοπο

2ον) $f(x)-g(x)<0 \to$

Άσκ. 9 α) $\int_0^1 \left(f^2(x) - 2f(x) + 1\right) dx = 0 \iff \int_0^1 (f(x)-1)^2 dx = 0$

Θ.δ.ο. $(f(x)-1)^2 = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

$(f(x)-1)^2 = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Με απαγωγή σε άτοπο·

Έστω $\exists x_1 \in [0,1] : (f(x_1)-1)^2 > 0$.
$(f(x)-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Από θεώρημα $\Rightarrow \int_0^1 (f(x)-1)^2 dx > 0$ Άτοπο

Άρα $(f(x)-1)^2 = 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$

Ερωτήσεις Σ-Λ.

1) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ τότε $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ (Λ) $\begin{cases} a < b \\ a = b \\ a > b \end{cases}$