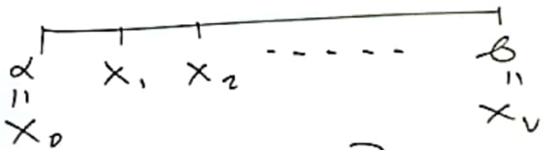
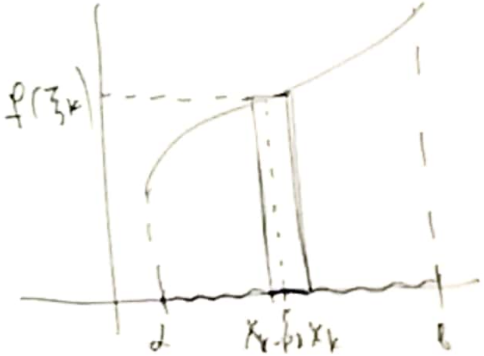
Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού που δημιουργείται από τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτησης f με $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

(1ο) Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη διαστήματα με μήκος $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$ και θεωρούμε τα σημεία $x_0=\alpha$, $x_1=\alpha+\Delta x$, $x_2=\alpha+2\Delta x$ κ.ο.κ. $x_\nu=\beta$



(2ο) Επιλέγω τυχαίο $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ και θεωρώ τα ορθογώνια με βάση Δx και ύψος $f(\xi_k)$

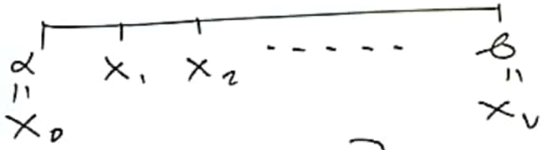


(3ο) Θεωρώ το άθροισμα $S_\nu = f(\xi_1)\cdot\Delta x + f(\xi_2)\cdot\Delta x + \dots + f(\xi_\nu)\cdot\Delta x$ το οποίο παριστάνει το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που όρισα στο (2ο)

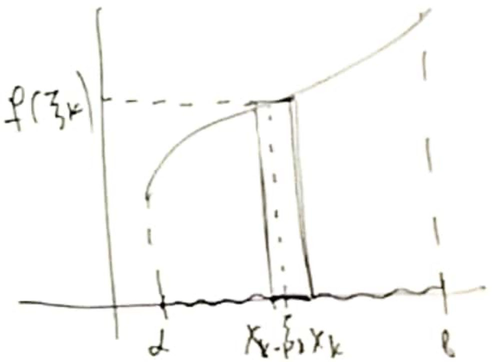
(4ο) Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu = \ell \in \mathbb{R}$ και το ℓ ορίζεται ως το ζητούμενο εμβαδόν.

Να δώσετε τον ορισμό του $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ μιας συνεχούς στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτησης f.

(1ο) Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη διαστήματα με μήκος $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$ και θεωρούμε τα σημεία $x_0=\alpha$, $x_1=\alpha+\Delta x$, $x_2=\alpha+2\Delta x$ κ.ο.κ. $x_\nu=\beta$



(2ο) Επιλέγω τυχαίο $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$



(3ο) Θεωρώ το άθροισμα $S_\nu = f(\xi_1)\cdot\Delta x + f(\xi_2)\cdot\Delta x + \dots + f(\xi_\nu)\cdot\Delta x$

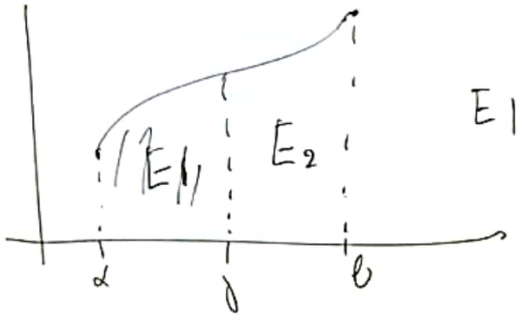
(4ο) Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{\nu\to+\infty} S_\nu = \ell \in \mathbb{R}$ και το ℓ ορίζεται ως το $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

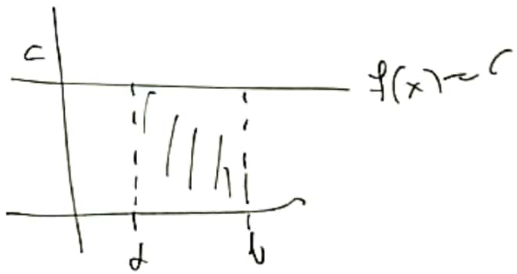
2) $\int_\beta^a f(x)\,dx = -\int_a^\beta f(x)\,dx$

3) $\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$



$E1 + E2 = E$

4) $\int_a^\beta c\,dx = c\cdot(\beta - a)$



5) $\int_\alpha^\beta \lambda\cdot f(x)\,dx = \lambda\cdot\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

6) $\int_\alpha^\beta \big(\lambda f(x) + k\cdot g(x)\big)\,dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + k\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

Θεώρημα: Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$ τότε

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \geq 0$$

Πόρισμα: Αν $f(x) \leq 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta] \Rightarrow$

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \leq 0$$

Πόρισμα 2: Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$ και $\exists x_1 \in [\alpha, \beta]: f(x_1) > 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$

Απόδειξη $\lim_{x\to x_1} f(x) > 0$, από όριο και διάταξη $\Rightarrow f(x) > 0$ κοντά στο x_1 $\Rightarrow \exists\, \gamma, \delta \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(x) > 0$ στο $[\gamma, \delta]$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\delta f(x)\,dx + \int_\delta^\beta f(x)\,dx > 0$$

Βασική άσκηση: Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

τότε $\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow$

$\underbrace{-\int_\alpha^\beta |f(x)|dx}_{-M} \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \underbrace{\int_\alpha^\beta |f(x)|dx}_{M} \Rightarrow$

$\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| \leq M = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$

Αν $f(x)$, $g(x)$ συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$

και $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [\alpha, \beta] \Rightarrow$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$

2η βασική άσκηση:

Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

M το μέγιστο της f στο $[\alpha, \beta]$

m το ελάχιστο της f στο $[\alpha, \beta]$

τότε $m(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq M(\beta-\alpha)$

Απόδειξη: Είναι $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow$

$\int_\alpha^\beta m\,dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta M\,dx$

$m(\beta-\alpha) \leq \quad \Rightarrow \quad \leq M(\beta-\alpha)$ ο.ε.δ.

Άσκ. 5 α) Αν $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx = 0$ τότε $f(x)=0 \ \forall x \in [\alpha, \beta]$

$f^2(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$

Θα εργαστώ με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω $\exists x_1 \in [\alpha, \beta] : f(x_1) \neq 0 \Rightarrow f^2(x_1) \neq 0$

Από θεώρημα $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx > 0$ άτοπο

Άρα $f(x) = 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$

Σημείωση: Α $\int_\alpha^\beta |f(x)| dx = 0$ τότε $f(x)=0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$

(β) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$

$\exists x_0 \in [\alpha, \beta] : f(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

Με απαγωγή σε άτοπο: έστω $\forall x \in [\alpha, \beta]$ η $f(x)$ διατηρεί πρόσημο

π.χ. $f(x) \geq 0$. Αν $\exists x_3 \in [\alpha, \beta] : f(x_3) > 0$, από θεώρημα $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$

Άρα $\forall x \in [\alpha, \beta] \ f(x) = 0$, άτοπο, από υπόθεση.

Scanned with CamScanner