**Ορισμός**: Έστω $f$ συνεχής σε διάστημα $\Delta$. Ονομάζουμε παράγουσα της $f$ μια συνάρτηση $F(x)$ ώστε $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \Delta$.

**Θεώρημα**: Αν $F(x)$ μια παράγουσα της $f(x)$ στο $\Delta$. Τότε κάθε παράγουσα $G(x)$ της $f(x)$ στο $\Delta$ είναι $G(x) = F(x) + c$.

**Αποδ.**)

$$\left.\begin{aligned} F(x) \text{ παρ.} &\rightarrow F'(x) = f(x),\ x \in \Delta \\ G(x) \ \text{''} &\rightarrow G'(x) = f(x),\ x \in \Delta \end{aligned}\right\} \rightarrow F'(x) = G'(x),\ x \in \Delta \Leftrightarrow G(x) = F(x) + c,\ x \in \Delta$$

**Θεώρημα**: Αν $F(x)$ μια παράγουσα της $f$ σε $\Delta$. τότε κάθε συνάρτηση $H(x) = F(x) + c$ είναι παράγουσα της $f$ στο $\Delta$. **Αποδ.**) $H'(x) = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$ ο.ε.δ.

Πίνακας παραγουσών.

| | $f(x)$ | Παράγουσα |
|---|---|---|
| 1) | $x^{\nu}$ | $\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$ |
| 2) | $e^{x}$ | $e^{x} + c$ |
| 3) | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sqrt{x}$ |
| 4) | $\frac{1}{x},\ x>0$ | $\ln x + c$ |
| 5) | $\frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^*$ | $F(x) = \begin{cases} \ln\lvert x\rvert + c_1, & x>0 \\ \ln\lvert x\rvert + c_2, & x<0 \end{cases}$ |
| 6) | $\eta\mu x$ | $-\sigma\upsilon\nu x$ |
| 7) | $\sigma\upsilon\nu x$ | $\eta\mu x$ |
| 8) | $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ | $\varepsilon\varphi x$ |
| 9) | $\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ | $-\sigma\varphi x$ |
| 10) | $\varepsilon\varphi x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ | $-\ln \sigma\upsilon\nu x + c$ |
| 11) | $a^{x}$ | $\frac{a^x}{\ln a} + c$ |
| 12) | $\ln x$ | $x\ln x - x + c$ |

| | $f(x)$ | Παράγουσα |
|---|---|---|
| 1) | $(ax+b)^{\nu}$ | $\frac{(ax+b)^{\nu+1}}{a(\nu+1)} + c$ |
| 2) | $e^{ax+b}$ | $\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$ |
| 3) | $\eta\mu(ax+b)$ | $-\frac{1}{a}\sigma\upsilon\nu(ax+b) + c$ |

άσκ 4 / Σελ. 2 $\quad$ $\text{συν}^2 x$, $\text{εφ}^2 x$

α) $\dfrac{3x-2}{x^2+2x-3} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3}$, $x \in \mathbb{R} - \{1, -3\} = A$

$\dfrac{3x-2}{(x+3)(x-1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3}$, $x \in A$

$3x-2 = a\cdot(x+3) + b\cdot(x-1)$, $x \in A$

$3x-2 = (a+b)\cdot x + (3a-b)$, $x \in A$

$\left\{\begin{array}{l} a+b = 3 \\ 3a-b = -2 \end{array}\right.$ $\quad 4a = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = 1/4}$

$b = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

$\dfrac{3x-2}{x^2+2x-3} = \dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{11}{4(x+3)}$.

β) $f : (-3, 1) \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$.

$f'(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+2x-3} = \dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{11}{4(x+3)}$ $\overset{\text{Α}\cdot\text{Δσκ.}}{\Leftrightarrow}$

$f(x) = \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{11}{4}\ln|x+3| + c$

$f(0) = 1 \Rightarrow$

$\frac{1}{4}\cancel{\ln|-1|} + \frac{11}{4}\ln 3 + c = 1 \Leftrightarrow$

$c = 1 - \frac{11}{4}\ln 3$

$f(x) = \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{11}{4}\ln|x+3| + 1 - \frac{11}{4}\ln 3$

---

Ασκ. 1

α) $f'(x) = 3\,\text{ημ}\,2x - 2\,\text{συν}\,\frac{x}{2}$ $\qquad f(0) = \frac{3}{2}$

$f(x) = -\frac{3}{2}\,\text{συν}\,2x - \dfrac{2}{\frac{1}{2}}\,\text{ημ}\,\frac{x}{2} + c$

β) $\text{εφ}^2 x = \dfrac{\text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \dfrac{1 - \text{συν}^2 x}{\text{συν}^2 x} = (\text{εφ}\,x)' - 1 =$

$= (\text{εφ}\,x - x)'$

$\text{σφ}^2 x = \dfrac{\text{συν}^2 x}{\text{ημ}^2 x} = \dfrac{1 - \text{ημ}^2 x}{\text{ημ}^2 x} = \dfrac{1}{\text{ημ}^2 x} - 1 \quad (\text{σφ}\,x - x)'$

$f'(x) = \text{εφ}^2 x + \text{σφ}^2 x = (\text{εφ}\,x - x - \text{σφ}\,x - x)'$

$f(x) = \text{εφ}\,x - \text{σφ}\,x - 2x + c$