Θέμα Γ

f συνεχής στο $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x)\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R}$

$$x f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) + \lim_{x\to-\infty} f(x), & x>0 \\ \eta\mu x + \lim_{x\to+\infty} f(x), & x<0\end{cases}$$

Γ1 Αφού f συνεχής $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)\in\mathbb{R}$.

Τότε $\lim_{x\to 0}(x\cdot f(x)) = 0\cdot f(0) = 0$

Τότε $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(x+1) + \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = 0 \Rightarrow$

$0 + \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Ομοίως $\lim_{x\to 0^-}\left(\eta\mu x + \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = 0 \Rightarrow$

$0 + \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Γ2 Έχω $x\cdot f(x) = \begin{cases}\ln(x+1), & x>0\\ \eta\mu x, & x<0\end{cases} \Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, & x>0 \\ f(0), & x=0 \\ \frac{\eta\mu x}{x}, & x<0\end{cases}$$

Αφού f συνεχής $\to \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Βρίσκω το $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x} \overset{0/0}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1} =$

Γ3 Για $x>0$: $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} =$

Έστω $A(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$, για $x \geq 0$

$A'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} <$

$\Rightarrow A(x) \downarrow$. Για $x>0 \Rightarrow A(x) < A(0) = 0$

Άρα για $x>0$, $f'(x)<0 \to f(x)\downarrow$ στο $[0,+\infty)$

Για $x\in[-\pi,0)$: $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot x - \eta\mu x}{x^2} > 0$

Έστω $B(x) = \sigma\upsilon\nu x\cdot x - \eta\mu x$, στο $[-\pi,0]$

$B'(x) = -\eta\mu x\cdot x + \cancel{\sigma\upsilon\nu x} - \cancel{\sigma\upsilon\nu x} = \underbrace{-x}_{+}\cdot\underbrace{\eta\mu x}_{-} = -$

$B(x)\downarrow$ στο $[-\pi,0]$ Για $x<0$ $B(x) > B(0) = 0$

Αφού $f'(x)>0$ στο $[-\pi,0) \overset{f\ \sigma\upsilon\nu}{\Longrightarrow} f(x)\uparrow$ στο $[-\pi,0]$

	$-\pi$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Γ4 $2^{f(x)} < f(x)+1 \quad (1) \quad x \geq 0$

Για $x>0 \rightarrow f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

$x>0 \rightarrow x+1>1 \rightarrow \ln(x+1)>0$

$\dfrac{\ln(x+1)}{x} > 0 \rightarrow f(x)>0 \rightarrow$

$f(x)+1>1>0$, $\boxed{f(0)=1>0 \Rightarrow f(0)+1>0}$

$(1) \Leftrightarrow \ln 2^{f(x)} < \ln\left(f(x)+1\right) \Leftrightarrow$

$f(x)\cdot \ln 2 < \ln\left(f(x)+1\right) \xrightarrow{f(x)>0}$

$\ln 2 < \dfrac{\ln\left(f(x)+1\right)}{f(x)} \Leftrightarrow$

$\ln 2 < f\left(f(x)\right) \Leftrightarrow$

$f(1) < f\left(f(x)\right) \Leftrightarrow$

$1 > f(x) \Leftrightarrow f(0) > f(x) \Leftrightarrow$

$x>0$