

Θ έτα Γ f συνεχ στο \mathbb{R} .
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

$$x f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), & x > 0 \\ m \mu x + \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), & x < 0 \end{cases}$$

Γ1) Αφού f συνεχ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \in \mathbb{R}$.

τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot f(x)) = 0 \cdot f(0) = 0$

τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x+1) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = 0 \Rightarrow$

$$0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} (m \mu x + \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = 0 \neq 1$

$$0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Γ2) Έχω $x f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x > 0 \\ m \mu x, & x < 0 \end{cases} \rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, & x > 0 \\ f(0), & x = 0 \\ \frac{m \mu x}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Αφού f συνεχ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

Παράδειγμα το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$

Γ3) Για $x > 0$: $f'(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2}$

Έστω $A(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$, για $x > 0$

$$A'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} < 0$$

$\Rightarrow A(x) \downarrow$. Για $x > 0 \Rightarrow A(x) < A(0) = 0$

Άρα για $x > 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$ στο $[0, +\infty)$

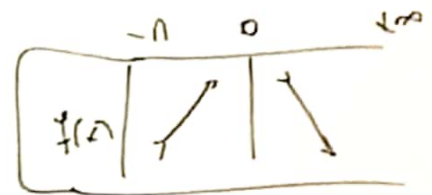
Για $x \in [-n, 0)$: $f'(x) = \frac{m \mu x \cdot x - m \mu x}{x^2} > 0$

Έστω $B(x) = m \mu x \cdot x - m \mu x$, στο $[-n, 0]$

$$B'(x) = -m \mu x \cdot x + m \mu x - m \mu x = -x \cdot m \mu x = -$$

$B(x) \downarrow$ στο $[-n, 0]$. Για $x < 0$, $B(x) > B(0) = 0$

Άρα $f'(x) > 0$ στο $[-n, 0) \Rightarrow f(x) \uparrow$ στο $[-n, 0]$



$$(14) \quad 2^{f(x)} < f(x) + 1 \quad (f) \quad x \geq 0$$

$$\text{f.o. } x > 0 \rightarrow f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$x > 0 \rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow \ln(x+1) > 0$$

$$\frac{\ln(x+1)}{x} > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$f(x) + 1 > 1 > 0 \quad , \quad f(0) = 1 > 0 \Rightarrow f(0) + 1 > 0$$

$$(1) \Rightarrow \ln 2^{f(x)} < \ln(f(x) + 1) \quad (\leftarrow)$$

$$f(x) \cdot \ln 2 < \ln(f(x) + 1) \quad \xleftrightarrow{f(x) > 0}$$

$$\ln 2 < \frac{\ln(f(x) + 1)}{f(x)} \quad (\leftarrow)$$

$$\ln 2 < f(f(x)) \quad (\leftarrow)$$

$$f(1) < f(f(x)) \quad (\leftarrow)$$

$$1 > f(x) \quad (\Rightarrow) \quad f(0) > f(x) \quad (\leftarrow)$$

$$x > 0$$