Θέμα 2ο

$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

α) Πρέπει

$x+\sqrt{x^2+1}>0$ και $x^2+1\ge 0$ ισχύει

$\sqrt{x^2+1}>-x$ (1)

1ον αν $x\ge 0 \Rightarrow -x\le 0$

$\sqrt{x^2+1}>0 \Rightarrow$

η (1) αληθεύει

2ον αν $x<0 \Rightarrow -x>0$

(1) $\Rightarrow x^2+1>(-x)^2 \Leftrightarrow 1>0$

αληθεύει

Άρα η (1) αληθεύει $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow D_f=A=\mathbb{R}$

αν $x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=$

$=\ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=$

$=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=\cancel{\ln 1}-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=$

$=-f(x)\Rightarrow f$ περιττή

(β) $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=$

$=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{(x+\sqrt{x^2+1})}\sqrt{x^2+1}}>0$

f ↑ στο $\mathbb{R}$ → όχι ακρότατα.

$f''(x)=-\frac{\sqrt{x^2+1}'}{\sqrt{x^2+1}^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)2\sqrt{x^2+1}}$

x		0	
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	∪		∩

Σ.Κ. (0,0)

Συνεχής στο $\mathbb{R}$ ⇒ όχι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x}\ \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]=+\infty \Rightarrow$ όχι ασύμπτ. στο $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{u\to+\infty}f(-u)=-\lim_{u\to+\infty}f(u)=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(-u)}{-u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=0$

όχι ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

(γ) f ↑ ⇒ αντιστρέψιμη $D_{f^{-1}}=f(A)=\mathbb{R}$

$\ln(x+\sqrt{x^2+1})=y \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=e^y \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+1}=e^y-x$, $e^y-x\ge 0$

$x^2+1=e^{2y}-2xe^y+x^2 \Leftrightarrow 2xe^y=e^{2y}-1$

$x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}$. $f^{-1}(y)=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}$, $y\in\mathbb{R}$

$f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow$

f ↑

$\underbrace{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-x}_{A(x)}=0$

Είναι $A(0)=0$. $A'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1=$

$\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0 \Rightarrow A(x)$ ↓ στο $\mathbb{R}$

Άρα $x_0=0$ μοναδική ρίζα

Ε] $f'(x)+f'(3x)=f'(2x)+f'(5x)$ / $\pi o=\mathbb{R}$

$f'(x)-f'(2x)=f'(5x)-f'(3x)$ (2)

$x=0$ μία ρίζα.

Αν $x>0 \Rightarrow 2x>x \xrightarrow[[0,+\infty)]{f'\downarrow} f'(2x)<f'(x)$

Το 1ο μέλος της (2) είναι θετικό.

$x>0\Rightarrow 5x>3x \xrightarrow{f'\downarrow} f'(5x)<f'(3x)\Rightarrow$

Το 2ο μέλος της (2) είναι αρνητικό

Άρα όχι θετική ρίζα.

Ομοίως, όχι αρνητική ρίζα.

Θέμα 2ο

$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ (β) $f'(x) = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} =$

(Σ7)

$$\boxed{\ln\left[\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{e^2+1}-e\right)\right] < \frac{n-e}{\sqrt{e^2+1}}} \quad (3) \iff$$

$$\ln\left(n+\sqrt{x^2+1}\right) + \ln\left(\sqrt{e^2+1}-e\right) < \frac{n-e}{\sqrt{e^2+1}} \iff$$

$$f(n) + f(-e) < \frac{n-e}{\sqrt{e^2+1}} \iff$$

$$f(n) - f(e) < \frac{n-e}{\sqrt{e^2+1}} \quad \overset{n-e>0}{\iff}$$

$$\boxed{\frac{f(n)-f(e)}{n-e} < \frac{1}{\sqrt{e^2+1}} \quad (4)}$$

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists\, \xi \in (e, n)$:

$$\frac{f(n)-f(e)}{n-e} = f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}} \quad (5)$$

$$e < \xi < n \ \underset{(0,+\infty)}{\overset{f' \downarrow}{\Longrightarrow}} \ f'(e) > f'(\xi) > f'(n)$$

$$(5) \Rightarrow \frac{f(n)-f(e)}{n-e} < f'(e) = \frac{1}{\sqrt{e^2+1}}$$

Άρα ισχύει η $(4) \iff (3)$ ο.ε.δ.