Θέμα 1°

$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x+\eta\mu x$. g 2φ. παρ/μη στο $\mathbb{R}$. $g''(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$

$g''(x)<0$, $x\in(-\infty,0)$. $g(0)=0$, εφαπτομένη της C_g στο $x_0=0$ $\quad \varepsilon: y=x$

A $f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x)=-\eta\mu x$.

$-1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1 \Rightarrow 1+\sigma\upsilon\nu x\ge 0$

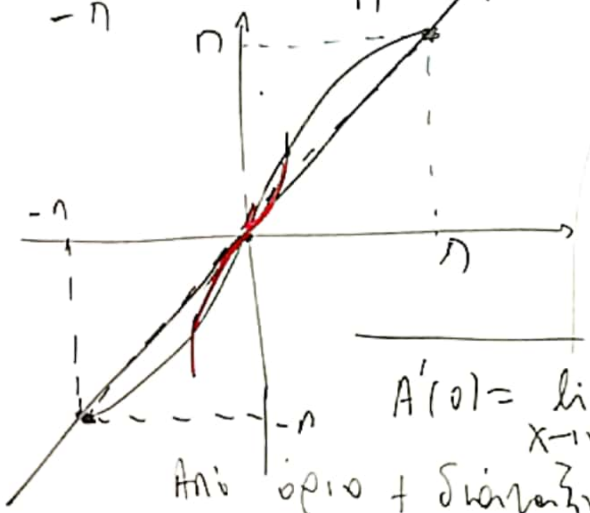
το "=" μόνο στο $\frac{3\pi}{2}$

x	$-\pi$		$3\pi/2$		π
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		↗		↗	

x	$-\pi$		0		π
$f''(x)$		+		−	0
$f(x)$		∪		∩	

$f(0)=0$

Ο.Ε. $-\pi$ $\quad$ Ο.Μ. π $\quad$ $y=x$ Σ.Κ.



B $f(x)=g(x)$

x		0	
$g''(x)$	−		+
$g'(x)$	↘		↗

x			
$g'(x)$	+	1	+
$g(x)$	↗		

$A(x)$ συνεχής στο $[a,\pi]$, από Θ.Β. $\Rightarrow \exists x_1: A(x_1)=0$

Έστω ότι η $A(x)$ έχει 3η ρίζα x_2 στο $[0,\pi]$. $A(0)=A(x_1)=A(x_2)$

Από Θ. Rolle $\Rightarrow \exists\ \rho_1,\rho_2$ ρίζες της $A'(x)$

$A'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x-g'(x)$. $\quad A''(x)=-\eta\mu x-g''(x)<0$

$\Rightarrow A'(x)\downarrow$ στο $[0,\pi]$ άτοπο

Άρα ακριβώς μία ρίζα της $A(x)$ στο $(0,\pi]$

Ομοίως, 1 ακριβώς ρίζα στο $[-\pi,0)$

Τελικά 3 ακριβώς

$A(x)=x+\eta\mu x-g(x)$

$A'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x-g'(x)$

$A'(0)=1+1-g'(0)=1>0$

$A'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{A(x)-\cancel{A(0)}}{x}=1>0$

Από όριο + διάταξη $\dfrac{A(x)}{x}>0$ για $x>0$ κοντά στο 0

$\Rightarrow A(x)>0$ κοντά στο 0. $\Rightarrow \exists\ a>0$ ώστε $A(a)>0$

$A(\pi)=\pi+\cancel{\eta\mu}\pi-g(\pi)=\pi-g(\pi)<0$

Αφού g ∪ στο $(0,+\infty)\Rightarrow g(x)>x$, $x>0\Rightarrow g(\pi)>\pi$

Γ $A(0)=0=A(x_1)$.

Από Θ. Rolle $\Rightarrow \exists\ \rho_1\in(0,x_1)\subseteq(0,\pi)$:

$A'(\rho_1)=0 \Leftrightarrow f'(\rho_1)=g'(\rho_1)\Rightarrow$ παράλ. εφαπτ.

Δ $A=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)-g(x)\big)=0$

$x>0$ $\quad f(x)-g(x)>0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}=\dfrac{2}{1}=2$

Scanned with CamScanner