Μελέτη συνάρτησης

1) Πεδίο ορισμού - συνέχεια
2) Άρτια - περιττή - περιοδική
3) $f'(x)$, $f''(x)$
Μονοτονία, ακρότατα - πίνακας
Κυρτότητα, σ. καμπής - πίνακας
Πίνακας μεταβολών
4) Ασύμπτωτες - οριακές τιμές σε άκρα διαστημάτων ($\pi.\chi.\ \pm\infty$, σημεία αλλαγής κλάδου)
5) Γραφική παράσταση

Ασκ. 2 / Σ.172

i) $f(x) = x + \frac{1}{x}$. $A_f = \mathbb{R} - \{0\}$ συνεχής

$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^* \to -x \in \mathbb{R}^*$ $\Rightarrow$ f περιττή.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1$ ή $x < -1$

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Τ.Μ $= -2$ Τ.Ε $= 2$

x	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

Όχι Σ.Κ

Πίνακας μεταβολών

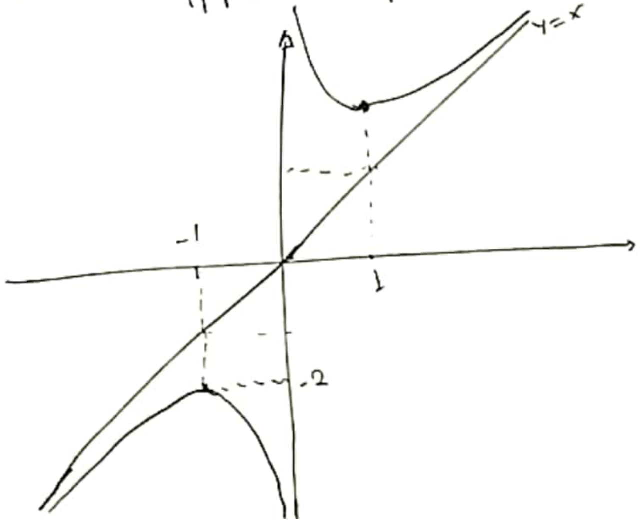
x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Τ.Μ $= -2$ Τ.Ε $= 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
κατακορ. ασύμπτ. ο $y'y$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Η ευθεία $y = x$ πλ. ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$



$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$$

$D_f=\mathbb{R}$. συνεχής

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot3=4-12=-8<0$$

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x+3}-(x-1)\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}}{(x^2-2x+3)}=$$

$$=\frac{x^2-2x+3-(x-1)^2}{(x^2-2x+3)\cdot\sqrt{x^2-2x+3}}=$$

$$=\frac{\cancel{x^2}-\cancel{2x}+3-\cancel{x^2}+\cancel{2x}-1}{(x^2-2x+3)\sqrt{x^2-2x+3}}$$

$f'(x)>0 \iff x>1$, $f''(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Ο.Ε. $\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
$f(x)$	∪	

όχι Σ.Κ.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	↘		↗

Ο.Ε. $\sqrt{2}$

Κατακόρυφη ασύμπτωτη δεν έχει. Συνεχής για στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=1$$

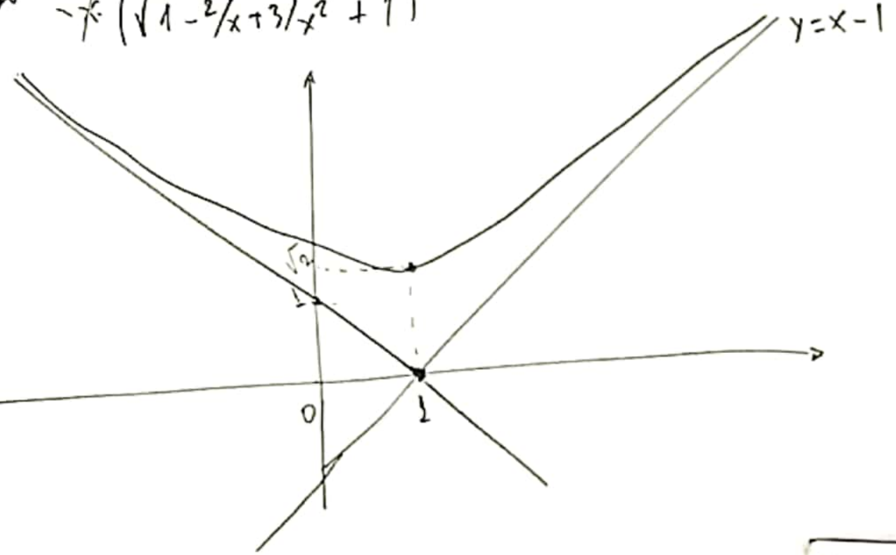
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-2x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(-2+3/x\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=-1$$

Η ευθεία $\varepsilon_1: y=x-1$ πλ. ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1.\quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+3}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}-2x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x+3}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(-2+3/x\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-2/x+3/x^2}+1\right)}=1 \implies$$ η ευθεία $\varepsilon_2: y=-x+1$ πλ. ασύμπτ. στο $-\infty$



Θέμα 3ο ΕΜΕ 2016

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(f(x)) = f(x) - \frac{x}{4}$ (1), $\forall x\in\mathbb{R}$

α) Έστω $f\downarrow$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2))$

$\hookrightarrow -\frac{x_1}{4} > -\frac{x_2}{4}$

$f(x_1)-\frac{x_1}{4} > f(x_2)-\frac{x_2}{4} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) > f(f(x_2))$

Άτοπο

Άρα $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda\in\mathbb{R}$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{f(f(x))}{f(x)}}_{A(x)}\cdot\underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{B(x)}\right] = \lambda\cdot\lambda = \lambda^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) \overset{f(x)=u}{=\!=} \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u} = \lambda$

όταν $x\to+\infty \Rightarrow u\to+\infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{x} = \lambda^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)-\frac{x}{4}}{x}\right] = \lambda^2 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{4}\right) = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda-\frac{1}{4}=\lambda^2$

$\boxed{\lambda=\frac{1}{2}}$

(γ) $f'(x) > \frac{1}{4}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$f'(x)-\frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow \left(f(x)-\frac{1}{4}x\right)' > 0 \Rightarrow A(x) = f(x)-\frac{1}{4}x \uparrow$

$A(0)=f(0)$. $\quad$ Για $x<0 \Rightarrow A(x) < A(0) \Rightarrow f(x)-\frac{1}{4}x < f(0) \Rightarrow f(x) < \frac{1}{4}x + f(0)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x+f(0)\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Θέμα 32ο ΕΜΕ 2016

(δ) $\underbrace{f(2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)+f(3)\cdot x(x-1)+f(4)\cdot x\cdot(x+1)}_{A(x)}=0$ (2) $(-1,1)$

$A(-1)= -f(3)\cdot(-2)=2f(3)>0$

$A(0)=-f(2)<0$

$A(1)=2f(4)>0$

$f(f(x))=f(x)-\frac{x}{4}$

Έστω $f(0)<0 \overset{f\downarrow}{=}, \quad f(f(0))<f(0)$

$f(0)-\frac{0}{4}<f(0)$

$f(0)<f(0)$ άτοπο.

$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{f(4)-f(3)}{f(2)}$

$\frac{\rho_2+\rho_1}{\rho_1\cdot\rho_2}$

$\alpha x^2+\beta x+\gamma$

$\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$

$\rho_1\cdot\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$

Scanned with CamScanner