ασκ. 2 - Β'ομ / Σελ 69

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+5x+10}}_{A(x)}-\lambda x\right)=\beta\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(A(x)-\lambda x-\beta\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(A(x)-(\lambda x+\beta)\right)=0 \Leftrightarrow$$

η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$

πλαγ. ασύμπτ. της $C_{A(x)}$ στο $+\infty$. $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{A(x)}{x}=\lambda \Leftrightarrow \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(A(x)-\lambda x\right)=\beta \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x+10}}{x}=\lambda \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)=\beta \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}=\lambda \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+5x+10-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}=\beta \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda=1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(5+\frac{10}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1\right)}=\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta=\frac{5}{2}}$$

$$\boxed{\text{Άρα } \lambda=1}$$

2ος τρόπος:

$$\lim_{x\to+\infty}\Bigg(\underbrace{x\cdot\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda x}_{f(x)}\Bigg)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\Bigg(\underbrace{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda}_{A(x)}\Bigg)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=1-\lambda$$

Αν $1-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<1$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

Αν $1-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>1$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

Άρα πρέπει $1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)=\frac{5}{2}$$

Άρα $\lambda=1$

ασκ. 7 / φύλλο

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f^2(x)-5x f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{f(x)}{x}\cdot f(x) - 5\cdot f(x)}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot \underbrace{\left(\frac{f(x)}{x}-5\right)}_{A(x)}\right] = -\infty$

$y = 3x+5 \rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x) = 5$

$\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = -2 < 0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\underbrace{f(x)-(3x+5)}_{\Gamma(x)}\right] = 0$

$f(x) = \Gamma(x) + 3x + 5$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cdot f(x) + x^2 + 1}{x^2\cdot f(x) - 3x^3 + 2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{f(x)}{x} + 1 + \frac{1}{x^2}}{f(x) - 3x + 2} = \dfrac{3+1}{7} = 4/7$

Έχω $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 3$. Αν $B(x) = \dfrac{f(x)}{x} \leftarrow$ ξέρω $\lim\limits_{x\to+\infty} B(x) = 3$

$f(x) = x\cdot B(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot B(x)) = +\infty$

ασκ. 8 / φύλλο $\qquad \varepsilon: \ y = -x + 2$

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f^3(x) + x^3 = -6x \cdot f(x) \quad (1) \longrightarrow (f(x) + x)\underbrace{\left(f^2(x) - x f(x) + x^2\right)}_{A(x)} = -6x\, f(x) \quad (2)$

Αφού έχει ασύμπτωτη $\to$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta$

Για $x > 0$

$(1) \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 1 = -6 \frac{f(x)}{x} \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 1\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-6 \cdot \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$

$\lambda^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 = -1 \Leftrightarrow \lambda = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-6x\, f(x)}{f^2(x) - x f(x) + x^2} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-6 \frac{f(x)}{x}}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - \frac{f(x)}{x} + 1} = \frac{-6(-1)}{1 + 1 + 1} = \frac{6}{3} = 2$

Το $A(x)$ είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$

με $\Delta = (-x)^2 - 4x^2 = -3x^2 < 0$

Άρα αν $\Delta = 0 \to A(x) \geq 0$

Τότε $A(x) = f^2(x) - 2\frac{x}{2} f(x) + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{4}$

$= \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4}$

$A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f(x) = \frac{x}{2}$

Άρα για $x \neq 0$ $A(x) > 0$

$(2) \Rightarrow f(x) + x = \frac{-6x\, f(x)}{A(x)}$