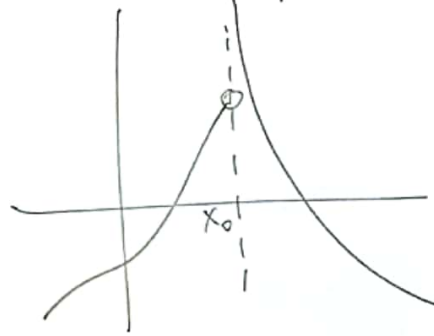
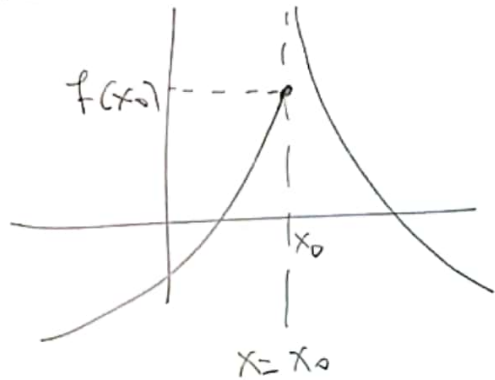


Ορισμός: Λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$$

Διευκρίνιση: Μπορεί $x_0 \in D_f$, μπορεί $x_0 \notin D_f$. Αν $x_0 \in D_f$ τότε f έχει όριο στο x_0 .



Μέθοδος: Ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες, για σημεία αβύσσου και για σημεία μηδενισμού παρανομοφάνειας ή μηδενισμού ορίσματος στο παρίσθαιον.

Π.χ 26.3/Σ.167

i) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

Ψάχνω για 1

iii) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

$$x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Ψάχνω για 0.

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Ψάχνω για 2 και για 3.

$$D_f = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\ln(x^2 - 5x + 6) \right] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

Θέτω $u = x^2 - 5x + 6$. όταν $x \rightarrow 2^- \Rightarrow u \rightarrow 0^+$

Κατακόρυφη ασύμπτωτη η ευθεία $x = 2$

ομοίως η $x = 3$

Ορισμός: Λέμε ότι η ευθεία $y=b$ είναι ορίσμου ασίτητων της f :

$$a) \text{ } b_0 + \infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

$$b) \text{ } b_0 - \infty \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

Λέμε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=ax+b$ είναι ηλαιοαβήτων της $f \iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

Θεώρημα: f έχει ηλαιοαβήτων $b_0 + \infty$ αν $\varepsilon: y=ax+b \iff$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b. \text{ Ομοίως για } -\infty.$$

$$\text{Αν } f(x) = \lambda x + b + g(x) \left\{ \begin{array}{l} \implies \text{η ευθεία } \varepsilon: y = \lambda x + b \text{ ηλαιοαβήτων της } f \text{ } b_0 + \infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Υπολογισμός } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \stackrel{14)}{=} 0.$$

Από τον ορισμό της ηλ. αβήτων $\implies$ η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + b$ ηλαιοαβήτων της f $b_0 + \infty$.

Agn 3-B'OM / Σε 2.69.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - ax+b. \quad a, b = ? \quad \text{where} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Apoi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\frac{x^2+1}{x+1}}_{A(x)} - (ax+b) \right] = 0 \xrightarrow{\text{opp}} \text{in order}$$

ε: $y = ax+b$ nă abiașăm m
mă $A(x)$ bna +∞

$$\Rightarrow a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{x}$$



$$-b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [A(x) - ax]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} = 1 \Rightarrow a = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [A(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2+1}{x+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2-x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x+1} = -1 \Rightarrow -b = -1 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

$$\text{Imr idia abiașăm: Bp e 1 ε m a, b w 6 2 ε} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 25 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 25) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (A(x) - ax + b - 25) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [A(x) - (ax - b + 25)] = 0 \Rightarrow \text{in order}$$

ε: $y = ax - b + 25$ nă abiașăm m
mă $A(x)$ bna +∞

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{x} = a \quad \text{kan} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [A(x) - ax] = -b + 25.$$

Aufg. 2 - B'04 / Σε 2.69.

$$\lambda = ? \text{ wobei } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 + 5x + 10}}_{A(x)} - \lambda x \right) \text{ und } \exists b \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [A(x) - \lambda x] = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (A(x) - \lambda x - b) = 0 \Leftrightarrow$$

in etwa $\varepsilon: y = \lambda x + b$ ist die Asymptote von $A(x)$ für $x \rightarrow +\infty$