Μια σημαντική επισήμανση στον κανόνα De L'Hospital.

Αν το όριο είναι μορφής $\frac{0}{0}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ ή $\pm\infty$ τότε υπάρχει το $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = x + \eta\mu x$, $g(x) = x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1}$ το οποίο δεν υπάρχει

Αυτό <u>δεν</u> σημαίνει ότι δεν υπάρχει το αρχικό $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{\eta\mu x}{x}}_{\to 0}\right) = 1$

άσκ.4 | f 2φ. παρ/μη.

i) $\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\right] \overset{(*)}{=} f(x)-2f(x)+f(x)=0$

Αφού f παρ/μη $\Rightarrow$ συνεχής $\lim\limits_{h\to 0} f(x+2h)=f(x)$

$f''(x)$

ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x+2h)\cdot 2-f''(x+h)}{1}$

$\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}+\dfrac{f'(x)-f'(x+h)}{h}\right] = \underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}}_{L_1} - \underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}}_{L_2}$

Ξέρω $f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$

για το L_1 θέτω $u=2h$, όταν $h\to 0$ τότε $u\to 0$

$h=\dfrac{u}{2}$

$L_1=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+u)-f'(x)}{\frac{u}{2}} = 2f'(x)$, $L_2=f'(x)$

Άρα $L=2f'(x)-f'(x)=f'(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2φ. παρ/μη στο 0.

$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2$

$f(x) \cdot f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0.$

i) $A = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x} = 2$

$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \cancel{f'(0)}}{x} = 2$

ii) $B = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$\Gamma = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot f'(x) + f^2(x) + e^{2\eta\mu x} - 2\eta\mu x - 1}{x^2 + f(x) \cdot f'(x)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{f'(x)}{x} + \frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{e^{2\eta\mu x} - 2\eta\mu x - 1}{x^2}}{1 + \frac{f(x)}{x^2} \cdot f'(x)} =$

$= \frac{2 + 0 + 2}{1 + 1 \cdot 0} = \frac{4}{1} = 4.$

$\lim \frac{f^2(x)}{x^2} = \lim \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{1} = f'(0) = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2\eta\mu x} \cdot 2\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x}{2x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu x}{\cancel{2}} \cdot \frac{e^{2\eta\mu x} - 1}{x} \right] =$

$= 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^{2\eta\mu x} \cdot 2\sigma\upsilon\nu x}{1} = 2$