- Αν f παρ/μη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.
- f δεν παρουσιάζει ακρότατο
- f διατηρεί μονοτονία;

$\boxed{\text{Απάντηση: ΝΑΙ}}$ Με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι δεν διατηρεί μονοτονία $\rightarrow \exists\, x_1, x_2, x_3$ με $x_1 < x_2 < x_3$ και

$$\left[f(x_1) < f(x_2) \text{ και } f(x_2) > f(x_3) \right] \text{ ή } \left[f(x_1) > f(x_2) \text{ και } f(x_2) < f(x_3) \right]$$

η f συνεχής στο $[x_1, x_3]$

από ΘΜΕΤ παρουσιάζει μέγιστο & ελάχιστο.

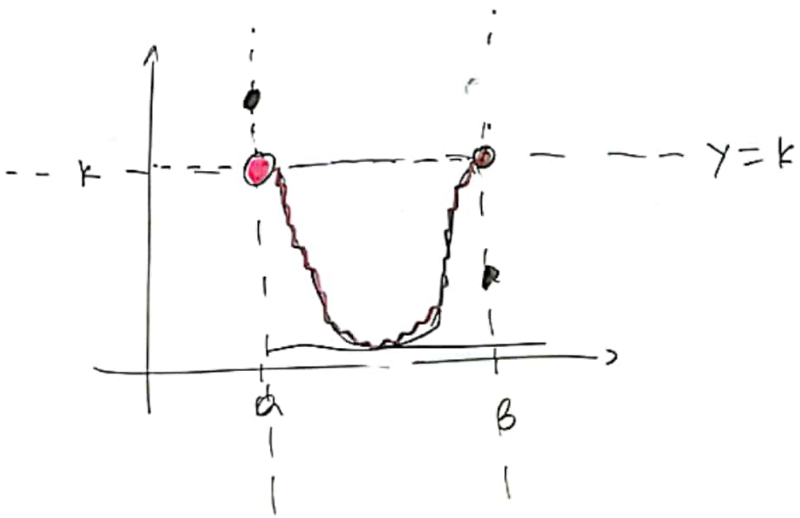
Το μέγιστο, το παρουσιάζει στο (x_1, x_3)

Αυτό θα ήταν τοπ. μέγιστο στο $\mathbb{R}$. Άτοπο.

Ομοίως

Ερώτηση: - f παραγωγίσιμη στο (α,β)
- $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\beta^-} f(x) = \ell$

$\xrightarrow{(?)}$ $\exists\, \xi \in (\alpha,\beta) : f'(\xi)=0$. Σ



Έστω η συνάρτηση

$$A(x) = \begin{cases} f(x), & x\in(\alpha,\beta) \\ \ell, & \text{αν } x=\alpha \text{ ή } x=\beta \end{cases}$$

♡ $A(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

διότι $\lim_{x\to\alpha^+} A(x) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \ell = A(\alpha)$

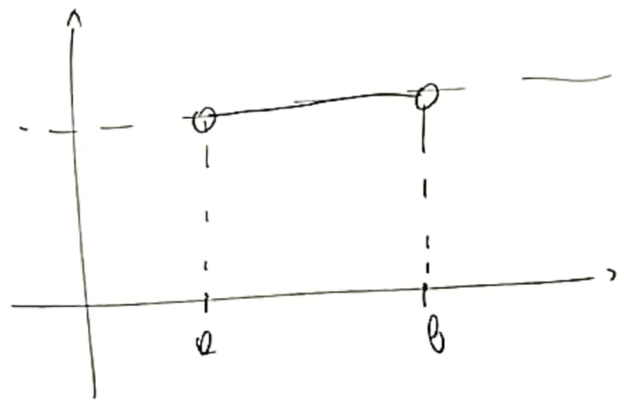
$\lim_{x\to\beta^-} A(x) = \lim_{x\to\beta^-} f(x) = \ell = A(\beta)$

♡ $A'(x) = f'(x) \quad \forall x\in(\alpha,\beta)$

♡ $A(\alpha) = A(\beta) = \ell$

Από Θ. Rolle $\Rightarrow \exists\, \xi\in(\alpha,\beta)$:

$A'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 0$



Κανόνες De L'Hospital.

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

και $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ ή $\pm\infty$

Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$ ή $\pm\infty$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

και $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ ή $\pm\infty$

Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$ ή $\pm\infty$

Άσκηση

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x - x}{x^3} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{3x^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\eta\mu x}{6x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\sigma\upsilon\nu x}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{3}{(\eta\mu x - x)} \cdot \overset{2}{(e^x - 1)^2}}{\underset{2}{(\sigma\upsilon\nu x - 1)} \cdot \underset{3}{(\sqrt{x+1} - 1)^3}} = \lim_{x\to 0} \left[\underbrace{\frac{\eta\mu x - x}{x^3}}_{A(x)} \cdot \underbrace{\frac{(e^x - 1)^2}{x^2}}_{B(x)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\sigma\upsilon\nu x - 1}}_{\Gamma(x)} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{(\sqrt{x+1} - 1)^3}}_{\Delta(x)} \right]$$

$\lim\limits_{x\to 0} A(x) = -\dfrac{1}{6}$, $\lim\limits_{x\to 0} B(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x} \right)^2 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \Gamma(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{-\eta\mu x} = -2$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = e^0 = 1$. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = 2$