$\boxed{\text{ασκ. 7}}$ $f(x) = e^{x+e^x}$

i) $f'(x) = e^{x+e^x} \cdot (x+e^x)' = e^{x+e^x}(1+e^x)$

$f''(x) = e^{x+e^x} \cdot (1+e^x)(1+e^x) + e^{x+e^x} e^x > 0 \rightarrow f \cup$ στο $\mathbb{R}$

ii) $f'(0) = e^1(1+1) = 2e$. $f(0) = e^1$. $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - e = 2ex \Leftrightarrow$

$y = 2ex + e$

iii) $e^{e^x+x-1} \geq 2x+1 \Leftrightarrow e^{e^x+x} \geq (2x+1)e = 2ex+e$

iv) $\boxed{f(2x+4) - f(2x+3) < f(x+1) - f(x) \quad (1)}$ Π.Ο. της ανίσωσης $= \mathbb{R}$

Έστω $A(x) = f(x+1) - f(x)$ $\nearrow$

$A'(x) = f'(x+1) - f'(x) > 0$

$x+1 > x \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x+1) > f'(x)$

$(1) \Leftrightarrow A(2x+3) < A(x) \Leftrightarrow 2x+3 < x \Leftrightarrow$

$x < -3$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{f(2x+4) - f(2x+3)}{(2x+4) - (2x+3)} < \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$

$\quad\quad \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad \|$

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

$2x+3 < \xi_1 < 2x+4$

$x < \xi_2 < x+1$

(1) Αν $x > 0$ [illegible]

$x+1 < 2x+3 \Leftrightarrow$

$-x < 2 \Leftrightarrow x > -2$

ΗΘΙΚΟ ΔΙΔΑΓΜΑ. ΤΟ ΘΜΤ το χρησιμοποιούμε για απόδειξη ανισοτήτων [illegible] άσκ. 8 | $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$a\ln x \le f(x) \le x-1$ (1) $\forall x\in(0,+\infty)$, $f''(x)\neq 0$, $x\in(0,+\infty)$

(i)

$a\ln x \le x-1 \quad \forall x>0$

$\underbrace{a\ln x - x + 1}_{A(x)} \le 0 \Leftrightarrow A(x)\le A(1)$

το $x_0=1$ θέση μεγίστου

$A'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$

Από Θ. Fermat

$A'(1)=0 \Rightarrow \frac{a-1}{1}=0 \Leftrightarrow a=1$

$\ln x \le f(x) \le x-1 \to f(1)=0$

f'' συνεχής και $f''(x)\neq 0$.

από σχόλιο Bolzano ⇒

διατηρεί πρόσημο. ⇒

$f''(x)>0 \quad \forall x>0 \Leftrightarrow f \cup , (0,+\infty)$

ή

$f''(x)<0 \quad \forall x>0 \Leftrightarrow f \cap , (0,+\infty)$

Αν $f \cup$ τότε θα ήταν πάνω από κάθε εφαπτομένη, άρα και από την (ε) άτοπο. Άρα $f \cap$

$f(x)=x-1$

$f'(x)=1$

$f''(x)=0$

$B(x)=f(x)-x+1 \le 0 \Rightarrow B(x)\le B(1)$

$B(1)=f(1)=0$

Από Θ.F. $\Rightarrow B'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=1$

Εφαπτομένη : ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$y=x-1$

παρατηρώ ότι $f(x)$ κάτω από την ε

δηλ. κάτω από μια εφαπτομένη