άσκ. 1 $f' \downarrow$, $f(1) = f(2) = 0$

i) Από Θ. Rolle $\rightarrow \exists\, \xi \in (1,2): f'(\xi) = 0$

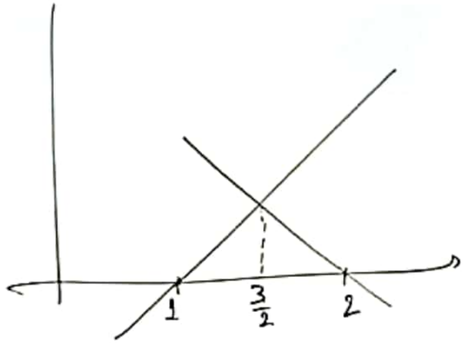
Αφού $f' \downarrow \Rightarrow \xi$ μοναδικό.

ii) για $x < \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0$

$x > \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0$

		ξ	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

Ο.Μεγ.



iii) $f'(1) = 1 \Rightarrow f(\xi) < 1$

ΘΜΤ $\rightarrow \exists\, \xi_1 \in (1, \xi): f'(\xi_1) = \dfrac{f(\xi) - \cancel{f(1)}}{\xi - 1}$

$1 < \xi_1 < \xi \Rightarrow f'(1) > f'(\xi_1)$

$\left.\dfrac{f(\xi)}{\xi - 1} < f'(1) = 1 \right\}$ $f(\xi) < \xi - 1 < 1$

$\xi - 1 > 0$

$\xi - 1 < 1 \Leftrightarrow$

$\xi < 2$ τ.ο. ισχύει

2ος τρόπος για το (iii)

Αφού $f \cap \rightarrow$ η C_f βρίσκεται κάτ[illegible] από οποιαδήποτε εφαπτομένη της.

Η εφαπτομένη στο $(1, f(1))$

$\varepsilon_1: y - \cancel{f(1)} = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$

$f(x) \leq x - 1$, το "=" ισχύει μόνο για [illegible]

$f(\xi) < \xi - 1 < 1$ (1) διότι $\xi - 1 < 1 \Leftrightarrow \xi <$ [illegible]

(iv) Αν $f'(2) = -1$ τότε $f(\xi) < 1/2$

Η εφαπτομένη στο $(2, f(2))$

$\varepsilon_2: y - \cancel{f(2)} = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -x + 2$

$f(x) < -x + 2$, $x < 2$

$f(\xi) < -\xi + 2 < 1$ (2)

$1 < \xi < 2 \Leftrightarrow$

$-1 > -\xi > -2$

$1 > 2 - \xi > 0$

(1),(2) $\Rightarrow$

$2 f(\xi) < 1 \Leftrightarrow$

$\boxed{f(\xi) < \frac{1}{2}}$

ασκ. 2

$f(1) = f(0) + 1$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 1$

i) $A(x) = f(x) - x \Rightarrow A'(x) = f'(x) - 1$

Από Θ. Rolle $\Rightarrow A(0) = f(0),\ A(1) = f(1) - 1$

$\exists\ \xi \in (0,1):\ A'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$f'(\xi) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$

$f \cap \Rightarrow f' \downarrow \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) < 1 \Leftrightarrow$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) < f'(\xi) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} > \xi$

ii) $g(x) = f(x) - x$

$g'(x) = f'(x) - 1 \qquad f'\downarrow$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow$

$f'(x_1) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1) - 1 > f'(x_2) - 1$

$\Leftrightarrow g'(x_1) > g'(x_2) \Leftrightarrow g' \downarrow \Leftrightarrow g \cap$

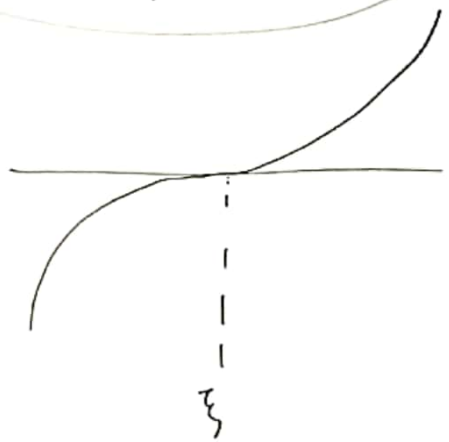
(iii) $g'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0$

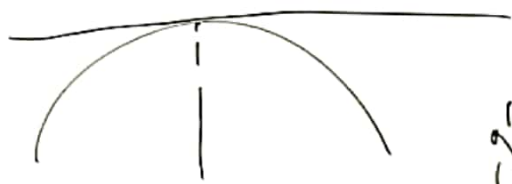
Για $x < \xi \Rightarrow g'(x) > g'(\xi) = 0$

$x > \xi \Rightarrow g'(x) < 0$

x	$-\infty$	ξ	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Ο.Μ.





$g'(\xi) = 0$

$g(x) \le g(\xi)$

άσκ. 3) $f'(x) \nearrow$, $f'(x) > 0$

$g(x) = f(e^x) \Rightarrow g'(x) = f'(e^x) \cdot e^x$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \xrightarrow{f' \nearrow} f'(e^{x_1}) < f'(e^{x_2})$

$e^{x_1} < e^{x_2}$

$\xrightarrow[\text{πολλ/ση}]{\text{θετικά}} f'(e^{x_1}) \cdot e^{x_1} < f'(e^{x_2}) \cdot e^{x_2}$

$g'(x_1) < g'(x_2) \Leftrightarrow g' \nearrow$

ασκ. 4) $f(x) = x \cdot \ln x$

i) $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $(0, +\infty)$

ii) $f'(1) = 1$.

$\varepsilon: y - \cancel{f(1)} = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$

$y = x - 1$

iii) $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0 \Leftrightarrow$

$x \cdot \ln x \geq x - 1$ το οποίο ισχύει

διότι η $f(x) = x \ln x$ κυρτή $\Rightarrow$ βρίσκεται "πάνω" από κάθε εφαπτομένη της, άρα και από την $\varepsilon: y = x - 1$

Το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$

(iv) $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3 \quad (1) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{\beta} - 1 + \frac{1}{\gamma} - 1 \geq 0$

$\boxed{1 - \frac{1}{\alpha} + 1 - \frac{1}{\beta} + 1 - \frac{1}{\gamma} \leq 0} \quad (2)$

Από το (iii) $\Rightarrow$

$\ln \alpha \geq 1 - \frac{1}{\alpha}$

$\ln \beta \geq 1 - \frac{1}{\beta}$

$\ln \gamma \geq 1 - \frac{1}{\gamma}$

$\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma \geq 1 - \frac{1}{\ldots}$

$\ln(\alpha \beta \gamma) \geq - - -$ δηλ. ισχύει η

$0 \geq 3 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}$ $\quad (2) \Leftrightarrow (1)$

άσκ. 5) $e^{f(x)}+f(x)=x \quad (1)$

i) $e^{f(x)}\cdot f'(x)+f'(x)=1 \iff$

$f'(x)\cdot\left(e^{f(x)}+1\right)=1 \overset{e^{f(x)}+1\neq 0}{\iff}$

$f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}+1}>0 \Rightarrow f \nearrow$

Αφού f παρ/μη $\Rightarrow e^{f(x)}$ παρ/μη

$\Rightarrow \dfrac{1}{e^{f(x)}+1}$ παρ/μη

$\Rightarrow f''(x)=\dfrac{-\left(e^{f(x)}+1\right)'}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}=-\dfrac{\overset{+}{e^{f(x)}}\cdot\overset{+}{f'(x)}}{\underbrace{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}_{+}}<0$

Άρα f ∩

ii) εξίσωση:

$f(2x)-f'(2x)=f(x)-f'(x) \overset{(1)}{\iff}$

Έστω $A(x)=f(x)-f'(x) \nearrow$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)$

$f'(x_1)>f'(x_2)\Rightarrow -f'(x_1)<-f'(x_2)$

$f(x_1)-f'(x_1)<f(x_2)-f'(x_2)$

$A(x_1)<A(x_2)$

$(1)\iff A(2x)=A(x)\iff 2x=x\iff$

$x=0$

μοναδική λύση.

ασκ. 6

$f \uparrow$, f κυρτή $\Leftrightarrow f' \uparrow$

$f(1)+f(3)=0 \Leftrightarrow f(1)=-f(3)$

i) $f(2)<0 \Leftarrow$

$1<3 \Rightarrow f(1)<f(3) \rightarrow$

$f(1)<0$ και $f(3)>0$

Από Θ. Bolz $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (1,3)$:

$f(x_0)=0$. x_0 μοναδικό.

Έχω $f(2)<0 \Leftrightarrow$

$f(2)+f(x_0) < f(1)+f(3)$

$2<x_0$

$f(2)-f(1)=f'(\xi_1)$

$f(3)-f(2)=f'(\xi_2)$

$\xi_1 < \xi_2 \rightarrow$

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

$f(2)-f(1) < f(3)-f(2)$

$2f(2) < f(1)+f(3)$

$2f(2)<0$

$f(2)<0$