Ασκ. 6 / Σ.152

$f(x) = (x-\alpha)^2 \cdot (x-\beta)^2 \cdot (x-\gamma)^2 \quad , \quad \alpha < \beta < \gamma$

$f'(x) = 2\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)^2\cdot(x-\gamma)^2 + 2(x-\alpha)^2\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)^2 + 2\cdot(x-\alpha)^2\cdot(x-\beta)^2\cdot(x-\gamma)$

$= 2\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)\cdot\left[\underbrace{(x-\beta)\cdot(x-\gamma) + (x-\alpha)\cdot(x-\gamma) + (x-\alpha)\cdot(x-\beta)}_{A(x)}\right]$

$A(\alpha) = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\gamma) > 0$
$A(\beta) = (\beta-\alpha)\cdot(\beta-\gamma) < 0$
$A(\gamma) = (\gamma-\alpha)\cdot(\gamma-\beta) > 0$

Από Θ. Bolz. $\Rightarrow \exists\, x_1 \in (\alpha,\beta)$ ρίζα της $A(x)$
$\Rightarrow \exists\, x_2 \in (\beta,\gamma)$ >> >>

$A(x)$ πολυώνυμο 2ου βαθμού. x_1, x_2 μοναδικές

Τελικά $f'(x)$ ρίζες $\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$

	$-\infty$		α		x_1		β		x_2		γ		$+\infty$
$x-\alpha$		−	0	+		+		+		+		+	
$x-\beta$		−		−		−	0	+		+		+	
$x-\gamma$		−		−		−		−		−	0	+	
$A(x)$		+		+	0	−		−	0	+		+	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	
			ΤΕ		ΤΜ		ΤΕ		ΤΜ		ΤΕ		

2ος τρόπος $f(x) \geq 0$ και $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$

Άρα 3 θέσεις ελαχίστου.

f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ για $x_1 \in (\alpha,\beta)$ $f(x_1) > 0$. Από Θ.ΜΕΤ. $\Rightarrow \exists\, x_2 \in (\alpha,\beta)$ θ. μεγίστου.

Ομοίως $\exists\, x_3 \in (\beta,\gamma)$ θ. μεγίστου.

Από Θ. Fermat $\Rightarrow$ η $f'(x)$ έχει 5 τουλάχ. ρίζες.

Αφού βαθμ$[f'(x)] = 5 \Rightarrow$ μοναδικές. Δεν υπάρχουν άλλες θέσεις ακροτάτων

Ορισμός: Αν $f:[\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$

f κυρτή ($f \cup$) $\Leftrightarrow$ $f'(x) \uparrow$ στο (α,β)

f κοίλη ($f \cap$) $\Leftrightarrow$ $f'(x) \downarrow$ στο (α,β)

Θεώρημα: Αν f συνεχής σε διάστημα Δ, 2 φορές παρ/μη στο Δ°

i) $f''(x)>0 \quad \forall x \in \Delta^\circ \Rightarrow f \cup$ στο Δ.

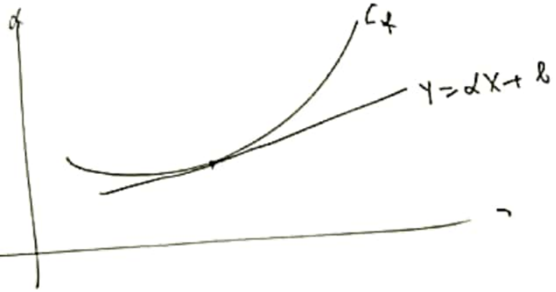
ii) $f''(x)<0 \quad \longrightarrow \quad \Rightarrow f \cap$ στο Δ.

Δεν ισχύει το αντίστροφο:
Δηλ. υπάρχει $f \cup$ στο Δ, 2 φ. παρ/μη
όμως $\exists\, x_1 \in \Delta : f''(x_1)=0$

$f(x)=x^4,\ x\in\mathbb{R}.\quad f'(x)=4x^3,\quad f''(x)=12x^2$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$
$f(x)$	$\cup$		$\cup$

Βασική ιδιότητα: Αν $f \cup$ στο διάστημα $\Delta \Rightarrow C_f$ βρίσκεται "πάνω" από οποιαδήποτε εφαπτομένη της



Ισχύει $f(x) \geq \alpha x+\beta \quad \forall x \in \Delta$

Το "=" ισχύει μόνο στο σημείο επαφής.

Αν $f \cap \Rightarrow f(x) \leq \alpha x+\beta$

Αν f 2φ. παρ/μη στο $[\alpha,\beta]$ και
$f \cup$ στο (α,x_0)
$f \cap$ στο (x_0,β).
Τότε το x_0 ονομάζεται σ. καμπής.