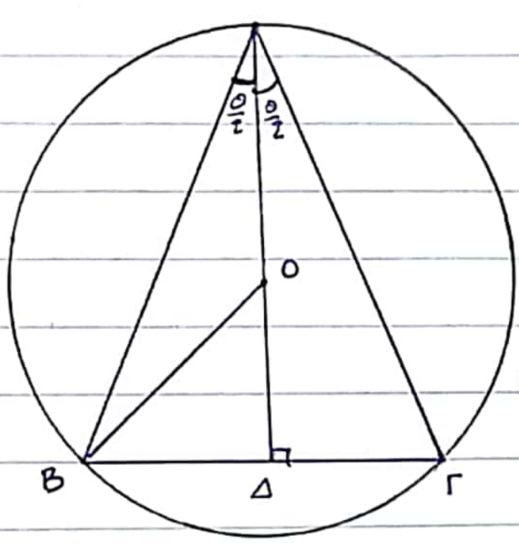
Πρόβλημα 1



$\overset{\triangle}{AB\Delta}$ ισοσκ. $\Rightarrow \hat{B}_1 = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \hat{O}_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta$

Διότι $\hat{O}_1$ εξωτερική στο OAB

$\overset{\triangle}{BO\Delta}$: $\eta\mu\theta = \frac{B\Delta}{OB} \Leftrightarrow B\Delta = OB \cdot \eta\mu\theta = R\eta\mu\theta$

$\Rightarrow O\Delta = R\sigma\upsilon\nu\theta$

$A\Delta = AO + O\Delta = R + R\sigma\upsilon\nu\theta = R(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$

$(AB\Gamma) = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2} = \frac{2R\eta\mu\theta \cdot R \cdot (1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{2}$

$(AB\Gamma) = R^2 \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$

Έστω η συνάρτηση $A(\theta) = \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$

$A'(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta) + \eta\mu\theta(-\eta\mu\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$= 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1$

Λύνω την εξίσωση $A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$ $\quad 0 < \theta < \pi$

$\theta = \pi$ ή $\theta = \frac{\cancel{2}\pi}{3}$

θ	0		$\frac{\cancel{2}\pi}{3}$		π
$A'(\theta)$		+	0	−	
$A(\theta)$		↗	Ο.Μ.	↘	

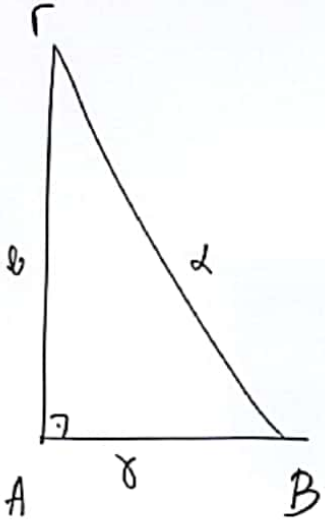
Αφού $A'(\theta)$ σχη και δεν μηδενίζεται στο $(0, \frac{\cancel{2}\pi}{3})$, $(\frac{\cancel{2}\pi}{3}, \pi) \Rightarrow$ διατηρεί πρόσημο $A'(\frac{\pi}{6}) = 2\cdot\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 > 0$

$A'(\frac{3\pi}{4}) = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 < 0$

Το μεγαλύτερο εμβαδόν το έχει το τρίγωνο με γωνία κορυφής $60°$ $\Rightarrow$ ισόπλευρο τρίγωνο

Πρόβλημα 2

$$(a+b+\gamma)^2 = a^2+b^2+\gamma^2+2ab+2a\gamma+2b\gamma$$



Έστω $A(x) = \dfrac{2x^2+c^2-2cx}{2c-2x}$, $x \neq c$, $\boxed{0 < x < c}$

$$A'(x) = \frac{(4x-2c)\cdot(2c-2x)+(2x^2-2cx+c^2)\cdot(+2)}{(2c-2x)^2} = \cdots$$

Λύνω την εξίσωση $A'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2+8cx-2c^2 = 0$

$$2x^2-4cx+c^2 = 0$$

$\Delta = 16c^2-4\cdot 2\cdot c^2 = 8c^2$. $x_{1,2} = \dfrac{4c \pm 2\sqrt{2}c}{4} = \dfrac{2c \pm \sqrt{2}c}{2}$

	0	$\frac{2c-\sqrt{2}c}{2}$	c
$A'(x)$	$-$	$+$	
$A(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

Περίμετρος $= c$

Έστω $a+b+\gamma = c \Rightarrow \gamma = c-a-b$

$$a^2 = b^2+\gamma^2$$

$$a^2 = b^2+(c-a-b)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{a^2} = b^2+c^2+\cancel{a^2}+b^2-\underline{2ca}-2cb+\underline{2ab}$$

$$2ca-2ab = 2b^2+c^2-2cb \Leftrightarrow$$

$$a(2c-2b) = 2b^2+c^2-2cb \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a = \frac{2b^2+c^2-2cb}{2c-2b}}$$

Ο αριθμητής της $A'(x)$ είναι

$$B(x) = -4x^2+8cx-2c^2$$

Η $B(x)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $\left[0, \frac{2c-\sqrt{2}c}{2}\right)$ και $\left(\frac{2c-\sqrt{2}c}{2}, c\right]$. Από θεώρημα Bolzano διατηρεί πρόσημο.

$B(c) = -4c^2+8c^2-2c^2 = 2c^2 > 0$

$B(0) = -2c^2 < 0$

Πρόβλημα 3

360 μαθ.

$\frac{2}{3} \to 240$ μαθ

πληθ. μαθ	Τιμή Εισιτ.	Έσοδα
240	36	$240 \cdot 36$
241	35,9	$241 \cdot 35,9$
242	35,8	
$240+x$	$36-0,1 \cdot x$	
300		
301		

Έστω x το πλήθος των πέραν των 240 μαθητών που θα δηλώσουν συμμετοχή $0 \leq x \leq 120$

Τα έσοδα είναι $(36-0,1x)(240+x) = E(x)$

$36 \cdot 240 + 36x - 24x - 0,1x^2 =$

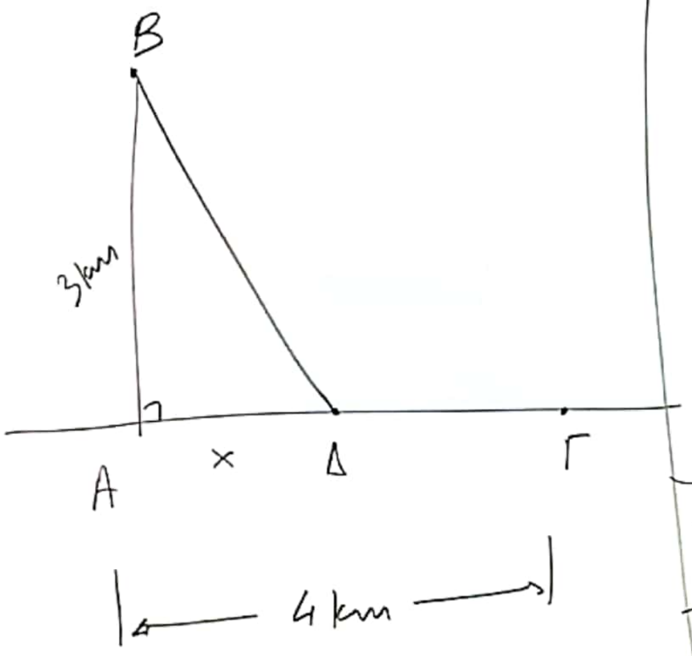
$-0,1x^2 + 12x + 36 \cdot 240 = E(x)$

$E'(x) = -0,2x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12}{0,2} = 60$

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 60$

x	0		60		120
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$		↗		↘	

Πρόβλημα 4



$v_\beta = 3\ km/h$

$v_\pi = 5\ km/h$

$$B\Delta = \sqrt{x^2+9}$$

$$v_\beta = \frac{B\Delta}{t_\beta} \Leftrightarrow$$

$$t_\beta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$$

$$\Delta\Gamma = 4 - x$$

$$v_\pi = \frac{\Delta\Gamma}{t_\pi} \Leftrightarrow$$

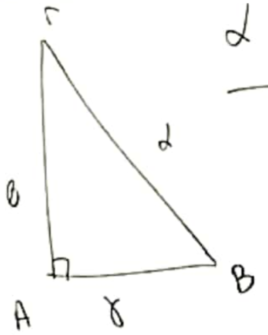
$$t_\pi = \frac{4-x}{5}.$$

$$t_{o\lambda} = t_B + t_\pi = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{4-x}{5} = A(x)$$

Προβλ. 5

$E = \frac{1}{2}\beta\gamma = c$

$\alpha \longrightarrow min$



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$\frac{1}{2}\beta\gamma = c \Rightarrow$$

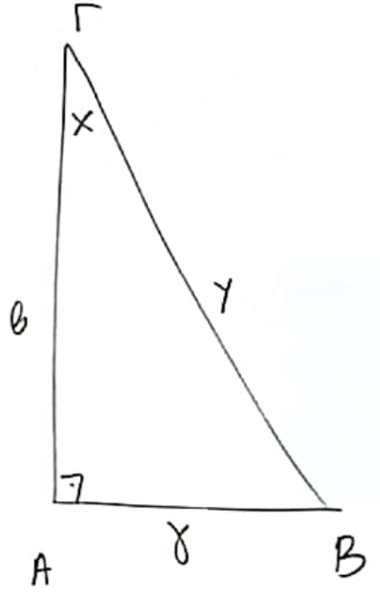
$$\gamma = \frac{2c}{\beta}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \frac{4c^2}{\beta^2}$$

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \frac{4c^2}{\beta^2}}.$$

Έστω $A(x) = \sqrt{x^2 + \frac{4c^2}{x^2}}$

Πρόβλημα 6



$$\frac{\gamma}{y} = ημx \iff \gamma = y\,ημx$$

$$\frac{β}{y} = συνx \iff β = y \cdot συνx$$

$$Π_{τρ.} = β + \gamma + y \iff$$

$$α = y\,συνx + y\,ημx + y$$

$$α = y\,(συνx + ημx + 1). \quad \left[\begin{matrix} ημx \\ συνx \end{matrix} > 0\right]$$

$$y(x) = \frac{α}{1 + ημx + συνx}.$$ Αρκεί να γίνει μέγιστο το $ημx + συνx = A(x)$

Περιμ. $= α$ σταθ.

$$y = \frac{α}{1 + ημx + συνx}$$

$A'(x) = συνx - ημx.$ $\quad A'(x) = 0 \iff x = \frac{π}{4}$

	0		$\frac{π}{4}$		$\frac{π}{2}$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η $A'(x)$ συνεχής και δεν μηδενίζεται για $\left[0, \frac{π}{4}\right)$, $\left(\frac{π}{4}, \frac{π}{2}\right] \rightarrow$ Από θεώρημα Bolzano διατηρεί πρόσημο. $A'(0) = 1 - 0 = 1 > 0$

Scanned with CamScanner