ασκ.6] $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ παρ/μη με $f(x)=\left[x^2-(a+b)\cdot x+ab\right]f'(x)$ (1), $\forall x\in[a,b]$

$(x-a)\cdot(x-b)$

Αφού f παρ/μη $\Rightarrow$ f συνεχής στο $[a,b]$ $\rightarrow$ παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.

$f(a)=0\cdot f'(a)=0$
$f(b)=0\cdot f'(b)=0$

Έστω $\exists\, x_1\in(a,b):\ f(x_1)\neq 0$, π.χ. $f(x_1)>0$

Τότε παρουσιάζει στο $x_0\in(a,b)$ ακρότατο, αφού f παρ/μη στο x_0

από Θ. Fermat $\Rightarrow$ $f'(x_0)=0$. Από (1) $\Rightarrow$ $f(x_0)=\left[x_0^2-(a+b)\cdot x_0+ab\right]f'(x_0)=0$

Αφού το μέγιστο είναι $f(x_0)=0$.

Αν $\exists\, x_2\in(a,b):\ f(x_2)<0$ $\Rightarrow$ $\exists$ ελάχιστο, ομοίως $f'(x_0)=0$.

Αφού μέγιστο $=$ ελάχιστο $=0$ $\rightarrow$ $f(x)=0$ $x\in[a,b]$.

άσκ. 7) $f(x) = a\ln x + bx^2 - 3x + 2, \quad x>0$

$\left.\begin{array}{l} f'(1)=0 \\ f'(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dots$

(β) $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2. \quad f'(x) = \frac{2}{x} + x - 3.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} + x - 3 > 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 2 + x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$

	0	1	2
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗
		Τ.Μ.	Τ.Ε.

$f(1) = \frac{1}{2} - 3 + 2 = -\frac{1}{2}. \quad f(2) = 2\ln 2 + 2 - 6 + 2 = 2\ln 2 - 2.$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty. \quad A = (0,+\infty) = \underbrace{(0,1]}_{A_1} \cup \underbrace{[1,2]}_{A_2} \cup \underbrace{(2,+\infty)}_{A_3}$

$f(A_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right], \quad f(A_2) = \left[2\ln 2 - 2, -\frac{1}{2}\right), \quad f(A_3) = (2\ln 2 - 2, +\infty)$

$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \mathbb{R}.$

$f(x) = \lambda$

$y = \lambda$

(βii) Πλήθος ριζών $f(x) = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$

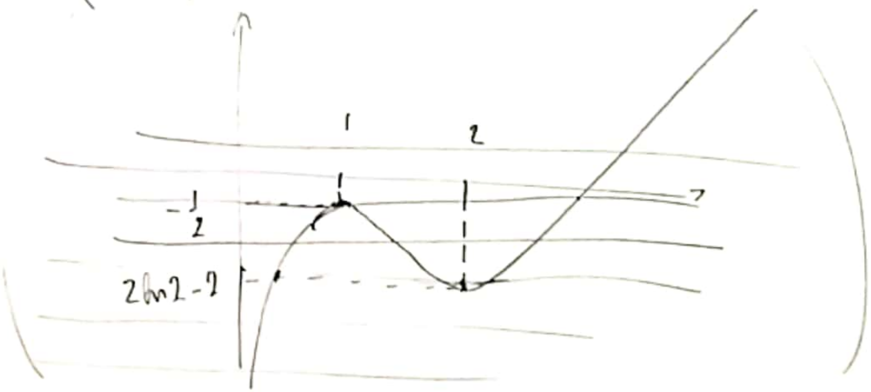
1) Αν $\lambda \in (-\infty, 2\ln 2 - 2) \to$ 1 ρίζα

2) Αν $\lambda = 2\ln 2 - 2 \Rightarrow$ 2 ρίζες

3) Αν $\lambda \in \left(2\ln 2 - 2, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ 3 ρίζες

4) Αν $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ 2 ρίζες

5) Αν $\lambda > -\frac{1}{2} \Rightarrow$ 1 ρίζα



Scanned with CamScanner

ασκ. 8) (α) $a, b \in (0,+\infty)$ $a+b=1$. Ν.δ.ο. $a^a \cdot b^b \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln a^a \cdot b^b \geqslant \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\boxed{b=1-a}$ $\ln a^a + \ln b^b \geqslant -\ln 2 \Leftrightarrow a\ln a + b\ln b \geqslant -\ln 2$

$a\cdot\ln a + (1-a)\cdot\ln(1-a) \geqslant -\ln 2.$

Έστω $A(x) = x\ln x + (1-x)\cdot\ln(1-x)$

$x > 0$ και $1-x>0 \Leftrightarrow x<1 \Rightarrow D_{A(x)} = (0,1)$

$A'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - \ln(1-x) + \cancel{(1-x)}\cdot\frac{-1}{\cancel{1-x}} = \ln x + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln x - \ln(1-x)$

$A'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln(1-x) \Leftrightarrow x > 1-x \Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

x	0		1/2		1
$A'(x)$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		↘		↗	

ο.ε.

$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$