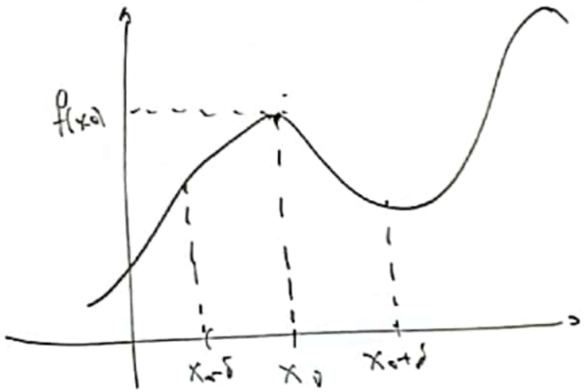
Ορισμός: Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \iff f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta), \ \delta > 0.$

$$f(x) \geq f(x_0)$$



Θεώρημα (Fermat) Αν $f: A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, εσωτερικό σημείο διαστήματος, και f παρ/μη στο x_0, τότε $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη: Έστω x_0 θέση τοπ. μεγίστου· τότε $\exists \delta > 0: \ f(x) \leq f(x_0) \ (1) \quad \forall x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Για $x < x_0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - x_0 < 0 \\ f(x) - f(x_0) \leq 0 \ (\text{από } (1)) \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

Αφού f παρ/μη στο $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \to \boxed{f'(x_0) \geq 0 \ (2)}$

Για $x > x_0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - x_0 > 0 \\ f(x) - f(x_0) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \xrightarrow{f \text{ παρ/μη}} \boxed{f'(x_0) \leq 0 \ (3)}$$

$$(2), (3) \to \boxed{f'(x_0) = 0}$$

Ερωτήσεις Σ - Λ.

1) Αν $f'(x_0)=0$ τότε στο x_0 η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. (Λ)

Αντιπαράδειγμα: $f(x)=x^3$. $f'(x)=3x^2 \geq 0$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

$f'(0)=0$

Δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=0$.

2) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ παρ/μη στο A και παρουσιάζει τοπ. ακρότατο στο x_0. Τότε $f'(x_0)=0$ (Λ)

Αν x_0 άκρο κλειστού διαστήματος: $f(x)=x^3$, $x \in [1,2]$ $x_0=1$ θέση ελαχίστου

$f'(x)=3x^2$. $f'(1)=3 \neq 0$.

3) Αν f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει τοπ. ακρότατο στο x_0 τότε $f'(x_0)=0$ (Σ)

4) $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε στο $x_0=2$ η f παρουσ. τοπ. ακρότατο. (Σ)

Τότε στο $x_1=1$ η f » » » (Λ)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

ασκ. 24 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(1)=2,\quad f(f(x))=x \ (1) \ , x>0$

i) Έστω $x_0\in(0,+\infty)$ θέση τοπ. ακροτάτου. ↳ εσωτερικό διαστήματος, f παρ/μη στο x_0 } Από Θ. Fermat $\Rightarrow f'(x_0)=0$

$(1)\Rightarrow f'(f(x))\cdot f'(x)=1 \Rightarrow$

$f'(f(x_0))\cdot \underset{0}{f'(x_0)}=1 \Leftrightarrow 0=1$ Άτοπο

ii) f' συνεχής. $f(f(1))=1\to f(2)=1$

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists\, \xi\in(1,2):\ f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{1-2}{1}=-1<0$

$f'(x)\neq 0\quad \forall x\in(0,+\infty)$, f' συνεχής } Από σχόλιο Bolzano $\Rightarrow$ διατηρεί πρόσημο $\Rightarrow f'(x)<0\quad \forall x>0 \Rightarrow f \downarrow$

Scanned with CamScanner

ασκ 25 $x^3 \geq x^2 + a\ln x \quad \forall x>0$ Ν.δ.ο. $a=1$

$\underbrace{x^3 - x^2 - a\ln x}_{A(x)} \geq 0$ $\Rightarrow A(x) \geq A(1) \quad \forall x>0$

$\Rightarrow$ το $x_0=1$ θέση τοπ. ακροτάτου

$A(1) = 1^3 - 1^2 - a\ln 1 = 0$

το $x_0=1$ εσωτερ. σημείο του $(0,+\infty)$.

Από Θ. Fermat $A'(1)=0$. $A'(x) = 3x^2 - 2x - \frac{a}{x}$

$\Rightarrow 3-2-\frac{a}{1}=0 \Leftrightarrow a=1$

ασκ.2 $2f(x) \leq f(1)+f(2) \quad (1)$

(i) $(1) \xRightarrow{x=1} 2f(1) \leq f(1)+f(2) \Rightarrow f(1) \leq f(2)$

$(1) \xRightarrow{x=2} 2f(2) \leq f(1)+f(2) \Rightarrow f(2) \leq f(1)$

$f(1)=f(2)$

(ii) $(1) \Rightarrow 2f(x) \leq 2f(1) \Rightarrow f(x) \leq \underset{\underset{f(2)}{||}}{f(1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Άρα $f(1), f(2)$ ολικό μέγιστο.

(iii) Αφού $f(1)=f(2)$, από Θ. Rolle $\Rightarrow \exists\, \xi \in (1,2): f'(\xi)=0$

Αφού $x_0=1$, $x_1=2$ θέσεις μεγίστων

1, 2 εσωτερικά σημεία του $\mathbb{R}$

Από Θ. Fermat $\Rightarrow f'(1)=f'(2)=0$

Θ. Rolle $\Rightarrow$

$\exists\, \xi_1 \in (1,\xi): f''(\xi_1)=0$

$\exists\, \xi_2 \in (\xi,2): f''(\xi_2)=0$

αση 1 $f(x) \geq 0$
f παρ/μη $\mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy \quad (1)$$

i) $(1) \xrightarrow[y=0]{x=0} f(0) = f(0) + f(0) \longrightarrow f(0) = 0$

$(y) \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x_0 = 0$ θέση ελαχίστου

Από Θ. Fermat $\rightarrow f'(0) = 0$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f(h) + 4x_0 h \Rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(h)}{h} + \frac{4x_0 \cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$f'(x_0) = f'(0) + 4x_0$$

$$f'(x_0) = 4x_0 \Rightarrow$$

$$f(x) = 2x^2 + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = 2x^2.$$

2ος τρόπος: x μεταβλητή, y σταθερά

$$(1) \Rightarrow f'(x+y) \cdot (x+y)' = f'(x) + 4y \Rightarrow$$

$$f'(x+y) = f'(x) + 4y$$

για $x = 0$ $\quad f'(y) = f'(0) + 4y \longrightarrow$

$$f'(y) = 4y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Scanned with CamScanner

άσκ. 3)

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x, & x<0 \\ x-2\sqrt{x}, & x\geq 0 \end{cases}$$

Για $x<0 \Longrightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$

Για $x>0 \Longrightarrow f'(x)=1-\frac{2}{2\sqrt{x}}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=-\infty$$

Άρα η f δεν είναι παρ/μη στο $x_0=0 \Longrightarrow$ κρίσιμο.

Για $x<0$ λύνω την εξίσωση

$f'(x)=0 \iff \frac{2}{3}x+\frac{1}{2}=0 \iff \frac{2}{3}x=-\frac{1}{2} \iff x=-\frac{3}{4}<0$

κρίσιμο.

Για $x>0$. $f'(x)=0 \iff 1-\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \iff$

$1=\frac{1}{\sqrt{x}} \iff \sqrt{x}=1 \iff x=1$

Για $x>0$. $f'(x)>0 \iff$

$1-\frac{1}{\sqrt{x}}>0 \iff 1>\frac{1}{\sqrt{x}} \iff x>1$

x	$-\infty$		$-3/4$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Στο $x_0=0$ είναι συνεχής.