ασκ. 21) $f'(1) = f(1) + f(0)$, $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

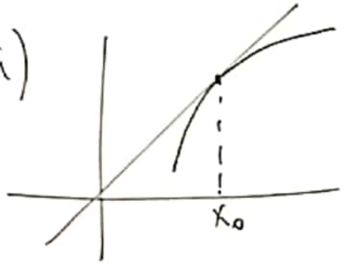
i) $f'(\xi) = f(1) - f(0)$

$\left.\begin{array}{l} f: \text{σ/χης στο } [0,1] \\ f: \text{παρ/μη στο } (0,1) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Θ.Μ.Τ.}} \exists\, \xi \in (0,1): f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1) - f(0)$

ii) $\boxed{f(0) > 0}$ $\quad f''(x) > 0 \Rightarrow f' \uparrow$

Από (i) $\Rightarrow$ $\xi < 1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(1) \Leftrightarrow f(1) - f(0) < \cancel{f(1)} + f(0) \Leftrightarrow$

$0 < f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) > 0$

iii) 

Θ.δ.ο. $\exists\, A(x_0, f(x_0))$ και

η εφαπτομένη $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ διέρχεται από το $O(0,0)$

$\Rightarrow -f(x_0) = -x_0 \cdot f'(x_0)$. Δηλ. Θ.δ.ο. η εξίσωση $x f'(x) = f(x)$ (1) έχει λύση

~~(1) $\Leftrightarrow$ $x \cdot f'(x) - f(x) = 0 \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$~~

~~$\dfrac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$~~

~~$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = 0$ (2)~~

~~Θέτω $A(x) = \dfrac{f(x)}{x}$~~

~~$A(x)$ σ/χής $[\xi, 1]$~~

$x \cdot f'(x) - f(x) = A(x)$

$A(0) = -f(0)$

$A(1) = f'(1) - f(1) = f(0)$

Bolzano

$\underline{\text{ασκ. 20}}$ $f(0)=0$, $f' \uparrow$ στο $[0,+\infty)$

i) $x\cdot f'(x)-f(x)>0$

$[0,x]$ f συνεχής
$(0,x)$ f παραγωγίσιμη

$\exists\, \xi \in (0,x): \; f'(\xi)=\dfrac{f(x)-\cancel{f(0)}}{x}$

$\xi < x \xrightarrow{f'\uparrow} f'(\xi) < f'(x)$

$\dfrac{f(x)}{x} < f'(x) \xrightarrow{x>0}$

$f(x) < x\, f'(x)$ ο.ε.δ.

ii) $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

$g'(x)=\dfrac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2}>0 \rightarrow g \uparrow$ στο $(0,+\infty)$

Scanned with CamScanner

ασκ. 19 $f'(x) > \frac{1}{x\ln x}$, $x \in (1,+\infty)$. $\Longrightarrow$ $f(3)-f(e) > \ln(\ln 3)$

$\hookrightarrow f'(x) > [\ln(\ln x)]' \Leftrightarrow [\underbrace{f(x) - \ln(\ln x)}_{A(x)}]' > 0$

Άρα $A(x) \uparrow$ στο $(1,+\infty)$.

$e < 3 \Rightarrow A(e) < A(3) \Leftrightarrow f(e) - \ln(\ln e) < f(3) - \ln(\ln 3) \Leftrightarrow$

$f(e) - f(3) < -\ln(\ln 3)$

ασκ. 18

$f(g(x)) = 1 - \ln x \quad (1), \quad x > 0$

$f'(g(x)) = x \quad (2), \quad x > 0$

Λύση) αφού f, g παρ/μες στο $(0,+\infty) \Rightarrow (f\circ g)$ παρ/μη στο $(0,+\infty)$

$(1) \Rightarrow f'(g(x))\cdot g'(x) = -\frac{1}{x} \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} x\cdot g'(x) = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow$

$g(x) \downarrow$ στο $(0,+\infty)$

(ii) Αφού $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x} + c$, $x \in (0,+\infty)$

$g(1) = \frac{1}{1} + c \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

$(1) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = 1 - \ln x \Leftrightarrow f(u) = 1 - \ln\frac{1}{u} = 1 + \ln u \Rightarrow$

$f(x) = 1 + \ln x$, $x > 0$

Scanned with CamScanner