άσκ.11) $f(x)=x^7+x, \quad x\in\mathbb{R}$

α) $f'(x)=7x^6+1>0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ → αντιστρέψιμη.

β) $f^{-1}(0)=y \Leftrightarrow f(f^{-1}(0))=f(y) \Leftrightarrow f(y)=0 \Leftrightarrow y=0$ Άρα $f^{-1}(0)=0$

$(f^{-1})'(0)$. $\quad f(f^{-1}(x))=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)=1 \xRightarrow{x=0} f'(f^{-1}(0))\cdot(f^{-1})'(0)=1 \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} f'(0)\cdot(f^{-1})'(0)=1 \\ f'(x)=7x^6+1 \Rightarrow f'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(f^{-1})'(0)=1.}$

Θα βρω το σύνολο τιμών της f. $f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$

(γ) $f^{-1}(2x)<x$.

Το Π.Ο. της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$. Το Π.Ο. της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$

$f^{-1}(2x)<x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(2x))<f(x) \Leftrightarrow 2x<x^7+x \Leftrightarrow x^7-x>0 \Leftrightarrow x(x^6-1)>0$

Λύνω την ανίσωση $x^6-1>0 \Leftrightarrow x^6>1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x>1$ ή $x<-1$

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$		$-$ 0 $+$		$+$
x^6-1	$+$	0	$-$	$-$ 0	$+$
$x\cdot(x^6-1)$	$-$	0 $+$	0 $-$	0	$+$

$x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

άσκ.11) $f(x)=x^7+x$, $x\in\mathbb{R}$

(δ) $ημ^7x+ημx=x^7+x$ Το π.ο. της εξίσωσης είναι το $\mathbb{R}$.

$f(ημx)=f(x) \overset{f:1-1}{\Longleftrightarrow}$

(1) $ημx=x \Leftrightarrow x=0$ μοναδική από γνωστή ανισότητα.

Αν x_0 λύση της (1)

$\Rightarrow ημx_0=x_0 \Rightarrow$

$|ημx_0|=|x_0| \Leftrightarrow x_0=0$

Αυτή η λύση επαληθεύει την (1)

ημ0 = 0.

(13) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $x>0$

$f(x)=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} \Rightarrow f'(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'=$

$=x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}\right)=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Λύνω την ανίσωση $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow$ $\ln x<1 \Leftrightarrow 0<x<e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

(β) $a>b>e$ ν.δ.ο. $a^b<b^a \Rightarrow$

$(a^b)^{\frac{1}{ab}}<(b^a)^{\frac{1}{ab}}$.